

## Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Bernays, P.:** Quelques points essentiels de la métamathématique. Enseignement Math. 34, 70—95 (1935).

Der Vortrag stellt vier verschiedene, wichtige, das Problem der Widerspruchsfreiheit betreffende Resultate aus dem Gebiete der Metamathematik in prägnanter Form heraus. — I. In Anwendung eines fundamentalen Satzes von Herbrand läßt sich, ohne die Frage der Widerspruchsfreiheit der gesamten Arithmetik heranzuziehen, zeigen: Ein Axiomensystem 1. Stufe, für das ein finites Zahlenmodell bekannt ist, kann innerhalb der gesamten Logik 1. Stufe (also auch bei Einbeziehung nichtfiniter Beweise) nicht zu einem Widerspruch führen (Beispiel: die Hilbertschen Axiome I—IV für die Geometrie). Der Beweis wird in einem grundlegenden, einfachen Beispiel durchgeführt. — II. Der Übergang von dem Symbolausdruck  $\epsilon_x \mathcal{A}(x)$  für „dasjenige, welches“ (der in der formalisierten Zahlentheorie die zahlentheoretischen Funktionen auszudrücken gestattet) zu dem von Hilbert mittels des Axioms  $A(x) \rightarrow A(\epsilon_x A(x))$  eingeführten  $\epsilon_x \mathcal{A}(x)$  wird geschildert. Die Vorteile des  $\epsilon_x \mathcal{A}(x)$  werden hervorgehoben, und die Tragweite der Widerspruchsfreiheitsbeweise für die Zahlentheorie, die von einem das  $\epsilon_x \mathcal{A}(x)$  enthaltenden Formalismus ausgehen, wird umrissen. — III. Der Verf. gibt eine übersichtliche Skizze des Beweises zum Satz von Gödel betreffs unentscheidbarer Sätze in einem die Zahlentheorie umfassenden Formalismus  $\mathfrak{F}$ , insbesondere betreffs der Nichtformalisierbarkeit eines Widerspruchsfreiheitsbeweises für  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{F}$ . — IV. Der von Bernays und Gentzen und von Gödel gleichzeitig durchgeführte Widerspruchsfreiheitsbeweis für die axiomatische Zahlentheorie  $\mathfrak{B}$  unter Zugrundelegung der Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Zahlentheorie wird in seinen Grundgedanken geschildert. Nach dem Gödelschen Satz muß ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für  $\mathfrak{B}$  zwar elementar kombinatorisch, jedoch nicht in  $\mathfrak{B}$  formalisierbar sein. Die „transfinite Induktion“ wird als ein Beispiel einer elementaren (und intuitionistisch zulässigen), nicht in  $\mathfrak{B}$  formalisierbaren Schlußweise aufgezeigt. — Inzwischen (Math. Ann. 112, 493ff.) hat Gentzen einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie geführt, dessen elementar kombinatorischer Standpunkt den Rahmen von  $\mathfrak{B}$  wirklich nur in einer (konstruktiv gefaßten) Anwendung der transfiniten Induktion überschreitet.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

**Huntington, Edward V.:** Mathematical postulates for the logical operations of assertion, conjunction, negation and equality. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 291—296 (1936).

Es wird ein Axiomensystem „ $(K, T, \times, ', \equiv)$ “ für die Aussagenlogik angegeben, dem die Klassen  $K$  (der Aussagen) und  $T$  (der gültigen Aussagen) und die implizite definierten Verknüpfungen „und“ ( $\times$ ), „nicht“ ( $'$ ) und „äquivalent“ ( $\equiv$ ) zugrunde liegen (als Mitteilungszeichen werden noch  $\rightarrow$ ,  $\&$  und  $\exists$  benutzt). Die Axiome sind so angelegt, daß die Negation  $a'$  von der „Absurdität“  $a^* \cdot \frac{a}{a'}$   $a \equiv (a \times a')$  verschieden ist. Auch sind für die Implikation  $a \prec b \cdot \frac{a}{a'}$   $(a \times b)^*$  (für welche  $a \prec b \equiv \cdot (a \times b) \equiv a$  zu  $T$  gehört) einige in der üblichen Aussagenlogik gültige Übergänge, welche einer rein implikativen Auffassung nicht entsprechen, nicht beweisbar; die Implikation ist vielmehr der Lewisschen analog.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

**Notcutt, B.:** A set of independent postulates for propositional functions of one variable. Ann. of Math., II. s. 36, 670—678 (1935).

Zur Beseitigung der semantischen Diskrepanz, die darin liegt, daß „ $x$ “ in  $\Phi x$  ein Objekt repräsentiert, in  $(Ex)\Phi x$  nicht, faßt der Verf. die Quantifikation  $E$  als



eine auf das Prädikat  $\Phi$  (statt auf die Aussage  $\Phi x$ ) ausgeübte Operation auf, und er gibt ein (in sich unabhängiges) Axiomensystem für die einstellige Prädikatenlogik an; in welchem er sich des so interpretierten Zeichenkomplexes  $E\Phi$  bedient. Einige grundlegende (von  $E$ -Überlagerungen freie) Sätze werden abgeleitet. Abschließend wird angedeutet, wie (mit Hilfe eines Schönfinkelschen Symbols) eine Erweiterung auf mehrstellige Prädikate anzusetzen wäre. *Arnold Schmidt.*

**Bernstein, B. A.:** Postulates for Boolean algebra involving the operation of complete disjunction. *Ann. of Math.*, II. s. 37, 317—325 (1936).

Angabe eines in sich unabhängigen Axiomensystems „ $(K, \circ, \times, ')$ “ der Booleschen Algebra, dem außer den Verknüpfungen „und“ und „nicht“ das ausschließende „oder“ ( $a \circ b$  bedeutet:  $a$  und nicht  $b$  — oder  $b$  und nicht  $a$ ) zugrunde liegt, nebst Herleitung der elementaren Sätze. (Die Gleichheit = wird „outside the system“ in den Axiomen benutzt.) *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

**Church, Alonzo:** An unsolvable problem of elementary number theory. *Amer. J. Math.* 58, 345—363 (1936).

In the formalism proposed by the author (this Zbl. 4, 145) a basic notion is that of conversion; a formula  $A$  is said to be convertible into  $B$  ( $A \text{ conv } B$ ) when it is possible to transform  $A$  into  $B$  by means of the rules of procedure alone. Consequently it is a fundamental problem of the system to determine whether two given formulas  $A$  and  $B$  are interconvertible or not. In consequence of some ideas of Gödel (this Zbl. 2, 1) the author (this Zbl. 8, 289) and Kleene (this Zbl. 11, 241), this problem can be stated in terms of number theory; in fact it can be stated as the problem of determining a function of two positive integers  $f(a, b)$ , such that  $f(a, b) = 2$  (the choice of 2 is accidental) if and only if the formulas represented à la Gödel by  $a$  and  $b$  are interconvertible. Stated in this way it is of the same general character as any of the familiar problems of number theory, for instance the last theorem of Fermat; indeed Kleene (l. c.) has shown that it includes almost any of these problems as a special case. Of course it is essential that the function be effectively calculable in some sense. The author proposes, as a definition of effective calculability, to identify that notion with definability in his system; this, he maintains, is a very general definition, and is fulfilled whenever any ordinary algorithm for calculating the values of  $f$  exists; it is equivalent to a generalized recursiveness due to Gödel and Herbrand. With this definition the author shows that the problem mentioned is unsolvable; the proof involves the exhibition of a contradiction similar to that of Richard on the assumption that such a function exists. As a corollary the author shows that the Entscheidungsproblem for an  $\omega$ -consistent system (as defined by Gödel, l. c.) admitting certain simple methods of definition and proof, is unsolvable in the same sense. This result has been more recently extended by the author [*J. Symbolic Logic* 1, 40—41 (1936)] to include the „engere Funktionenkalkül“. *H. B. Curry* (State College, Pennsylvania).

**McKinsey, J. C. C.:** On the independence of Hilbert and Ackermann's postulates for the calculus of propositional functions. *Amer. J. Math.* 58, 336—344 (1936).

The author proves by quite elementary methods the independence of the postulates for the restricted functional calculus (engere Funktionenkalkül) given by Hilbert and Ackermann (Grundzüge der theoretischen Logik, pp. 53—54, 1928). The rules of procedure are taken as postulates on an equal footing with the formal axioms.

*H. B. Curry* (State College, Pa.).

**Pepis, József:** Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems. *Acta Litt. Sci. Szeged* 8, 7—41 (1936).

Eine logische Funktion  $\Phi(x, y, z)$ , welche die Elemente  $x$  eines Individuenbereichs  $\mathfrak{J}$  auf die Paare von Elementen  $[y, z]$  aus  $\mathfrak{J}$  eineindeutig abbildet, heiße (1,2)-Funktion in  $\mathfrak{J}$ . In Teil I werden einige Sätze über Darstellungen beliebiger logischer Funktionen bewiesen, von denen der folgende hervorgehoben werde: Ist



$\Phi(x, y, z)$  eine (1,2)-Funktion in  $\mathfrak{J}$ ,  $F(x_1, \dots, x_{n-1}, v_n)$  eine beliebige logische Funktion, und setzt man

$$f(v_1) \equiv (E y_0)^{n-1} (E v_0)^n \left[ F(y_1, \dots, y_{n-1}, v_n) \& \sum_{n=1}^{i=1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \right]$$

[ $\sum$  = Konjunktion;  $(E y_0)^{n-1} = (E y_1) \dots (E y_{n-1})$ ], so ist

$$F = (E v_0)^{n-1} \left[ f(v_1) \& \sum_{n=1}^{i=1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \right].$$

II. In einem Zähl Ausdruck  $A$  werde eine Funktionsvariable  $\Phi(x, y, z)$  ausgezeichnet; die übrigen Funktionsvariablen seien  $F_1, \dots, F_k$ . Ein Individuenbereich  $\mathfrak{J}$  mit den Funktionen  $F'_1, \dots, F'_k, \Phi'$  bildet ein ausgezeichnetes Erfüllungssystem von  $A$ , wenn die Funktionen  $A$  in  $\mathfrak{J}$  erfüllen und  $\Phi'$  eine (1,2)-Funktion ist.  $A$  heißt ein  $\gamma$ -Ausdruck, wenn es, falls  $A$  überhaupt erfüllbar ist, ein ausgezeichnetes Erfüllungssystem von  $A$  gibt. Die Definition eines  $\beta$ -Ausdrucks entsteht hieraus, indem man  $\Phi$  durch  $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$  ersetzt. Unter Heranziehung des Löwenheimschen Satzes und des soeben hervorgehobenen Satzes wird nun gezeigt, daß sich zu jedem Zähl Ausdruck  $A$  ein in bezug auf Erfüllbarkeit gleichwertiger  $\gamma$ -Ausdruck (bzw.  $\beta$ -Ausdruck)  $B$  angeben läßt, der außer  $\Phi$  (bzw.  $R_1, R_2$ ) nur einstellige Funktionsvariablen enthält. Der Beweis für die Skolemsche Normalform wird so abgeändert, daß jedesmal, wenn der Grad des Präfixes um 1 herabgesetzt wird, nur eine einstellige Funktionsvariable hinzutritt; die Eigenschaft von  $B$ ,  $\gamma$ - ( $\beta$ -) Ausdruck zu sein, bleibt hierbei erhalten. Weitere bemerkenswerte Sätze ergeben sich, indem bekannte Reduktionsverfahren von Herbrand, Gödel, Kalmár mit der neuen Methode kombiniert werden. So wird u. m. bewiesen, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem beschränken darf auf solche Zähl Ausdrücke, die entweder a)  $\gamma$ - ( $\beta$ -) Ausdrücke in der Skolemschen Normalform sind und außer  $\Phi(R_1, R_2)$  nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten oder b)  $\beta$ -Ausdrücke sind, das Gödelsche Präfix  $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2) \dots (Ey_n)$  besitzen und außer  $R_1, R_2$  und  $=$  nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten, oder c) außer 5 zweistelligen nur noch einstellige Funktionsvariablen enthalten und ein Präfix der Form  $(Ex_1)(Ex_2)(Ex_3)(Ex_4)(y_1)(y_2)(Ex_5)(y_3)(y_4) \dots (y_n)$  besitzen, oder d)  $\beta$ -Ausdrücke sind, welche ein Präfix der Form  $(x_1)(Ey_1) \dots (Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$  besitzen und außer  $R_1, R_2$  und  $=$  nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten. In einem Zusatz teilt Verf. mit, daß er diese und andere Sätze seiner Arbeit in solcher Weise verschärft hat, daß die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen um zwei vermindert wird. Beweise dieser Verschärfungen, wie auch die Einordnung der Resultate in die beweistheoretische Betrachtungsweise des Prädikatenkalküls, folgen später.

A. Heyting (Enschede).

Reiser, Oliver L.: Modern science and non-Aristotelian logic. *Monist* 46, 299 bis 317 (1936).

Bouligand, Georges: Problèmes bien posés et problèmes à conditions surabondantes. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 5, 116—120 (1936).

## Algebra und Zahlentheorie.

Chakrabarti, S. C.: On a few algebraic identities. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 27, 37—44 (1935).

Es handelt sich um elementare Identitäten für verallgemeinerte höhere Differenzen; die Beweise beruhen auf vollständiger Induktion. Otto Szász.

Lurquin, C.: Sur une formule quasi-binomiale. *Mathesis* 50, 121—124 (1936).

Die Fakultätenformel  $(x+y)(x+y-1) \dots (x+y-h+1) = x(x-1) \dots (x-h+1) + \binom{h}{1} x(x-1) \dots (x-h+2) y + \binom{h}{2} x(x-1) \dots (x-h+3) y(y-1) + \dots + y(y-1) \dots (y-h+1)$  (die der Binomialformel analog ist) läßt sich durch einfache Wahrscheinlichkeits-



betrachtungen herleiten. Nebenbei ergibt sich auch die (sonst nach Vandermonde benannte) Formel für Binomialkoeffizienten  $\binom{x+y}{h} = \sum_{i=0}^h \binom{x}{i} \binom{y}{h-i}$ . *L. Schrutka.*

● **Favard, J.: Les théorèmes de la moyenne pour les polynômes. (Actualités scient. et industr. Nr. 302. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. I.)** Paris: Hermann & Cie. 1936. 51 pag. Frs. 15.—

Short survey over the recent literature on some results concerning rational and trigonometric polynomials which can be considered as improvements of Rolle's theorem or at any rate connected with it to some extent. The first part deals with the complex domain starting from Grace's theorem which leads immediately to the theorems of Grace-Heawood, Alexander-akeya and to similar results. On the other hands the theorems of Walsh and Biernacki are treated; they are based on other methods. In the second part questions of the real region are considered. Starting from the Gauss-Tchebycheff mechanical quadrature formula the recent results of Tchakaloff (*Acta math.* 63, 77; this *Zbl.* 9, 343) are discussed. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

**Favard, J.: Remarques sur le théorème de Grace.** *Bull. Sci. math., II. s.* 60, 79 bis 96 (1936).

Using Grace's theorem the following question is discussed. What can be said about the position of the zeros of the polynomials  $p(z)$  of the  $n$ -th degree satisfying the condition

$$\int_{-1}^{+1} p(z) d\psi(z) = 0.$$

Here  $\psi(z)$  is a given non decreasing function with  $\psi(1) > \psi(-1)$ . Denoting by  $|z| \leq R(n)$  the smallest circle containing at least one zero of every polynomial of this kind,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n} = |\alpha|,$$

$\alpha$  being the zero of minimal modulus of the integral function

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sz} d\psi(z).$$

*G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

**Popoviciu, Tiberiu: Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles.** (2. *congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.*) *Mathematica, Cluj* 9, 129 bis 145 (1935).

Considering the set of all polynomials of given degree  $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$  with only real roots and preassigned coefficients  $a_1, a_2$  the maximum and minimum of the roots is determined. The analogous problem with three first preassigned coefficients is also discussed. In a subsequent part a theorem of I. Schur is derived determining the maximum of the roots of  $f''(x)$  if  $f(x)$  has only real roots and the greatest roots of  $f(x)$  and  $f'(x)$  are given. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

**Bourgin, D. G.: The diagram method for determinant expansions.** *Amer. Math. Monthly* 43, 344—347 (1936).

**Raiford, T. E.: Geometry as a basis for canonical forms.** *Amer. Math. Monthly* 43, 82—89 (1936).

This note is an exposition, very similar to Weyl's (*Mathematische Analyse des Raumproblems*, Anhang 12), of the theory of canonical forms relative to similarity of a single matrix with coefficients in an algebraically closed field. *Jacobson.*

**Theilheimer, Feodor: Ein Beitrag zur Theorie der charakteristischen Invarianten.** *Math. Z.* 41, 451—464 (1936).

Eine lineare Transformation der Veränderlichen  $x$  einer Form  $f$  induziert eine lineare Transformation des Koeffizienten  $A$  von  $f$ . Eine Invariante  $J(A)$  von  $f$  heißt charakteristisch, wenn die linearen Transformationen von  $A$ , welche  $J(A)$  bis auf



einen Faktor invariant lassen, genau die im erwähnten Sinne induzierten Transformationen sind. Versteht man unter einer spezialisierten Form  $f$  eine Potenz einer Linearform, so sind die induzierten Transformationen genau diejenigen, welche spezialisierte Formen in spezialisierte überführen. Es werden Kriterien dafür angegeben, wann eine Invariante charakteristisch ist. Mit Hilfe dieser Kriterien wird gezeigt, daß alle Invarianten einer ternären kubischen Form charakteristisch sind. Die charakteristischen Invarianten von binären Formen haben Ostrowski und Schur behandelt [A. Ostrowski, Math. Ann. **79**, 360 und Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **33**, 174 (1925); I. Schur, Math. Z. **15**, 81 (1922)]. van der Waerden (Leipzig).

**Weitzenböck, R.: Zur Theorie der Semi-Invarianten.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 575—578 (1936).

Es wird eine aus  $m$  binären Semiinvarianten unter Zuhilfenahme des O-Prozesses gebildete  $m$ -reihige Determinante angegeben, die gleichfalls semiinvariant ist. Der zugehörige Operator stellt, auf die durch die Semiinvarianten bestimmten Kovarianten angewandt, eine Verallgemeinerung des Überschiebungsprozesses dar. — Für den speziellen Operator  $a_0 O - \eta a_1$  (wo  $\eta = \text{Exzeß } pg - 2\omega$ ) werden einige Sätze angegeben. Bodewig (Basel).

**Kwal, Bernard: Demi-vecteurs et tenseurs.** J. Physique Radium, VII. s. **7**, 223 bis 226 (1936).

Neben Spinoren und Semivektoren betrachtet Verf. die von ihm eingeführten Binoren (bineurs); die letzteren sind reelle Größen mit 8 Komponenten. Es wird der Zusammenhang zwischen allen diesen Größen untersucht, und es wird gezeigt, daß man daraus 4 Vektoren, 3 antisymmetrische Tensoren und 2 Skalare bilden kann. V. Fock (Leningrad).

**Grieco, Domenico: Sul gruppo automorfo dell'algebra regolare complessa del IV ordine.** Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **73**, 115—128 (1935).

Au groupe automorphe d'une algèbre du type considéré correspond dans  $S_4$  un groupe  $\infty^3$  d'affinités transformant en elle-même l'hypersurface de  $S_4$  représentant les diviseurs de zéro. Cette hypersurface est ici un cône du second degré, etc.... P. Dubreil (Nancy).

**Scorza, Gaetano: Le algebre del 4° ordine.** Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **73**, 129 bis 212 (1935).

Reproduction du mémoire déjà publié par l'Auteur aux Atti R. Accad. Sci. fisiche e matematiche di Napoli, IIa. s. **20** (ce Zbl. **12**, 392). P. Dubreil (Nancy).

**Speiser, A.: Zahlentheorie in rationalen Algebren.** Comment. math. helv. **8**, 391 bis 406 (1936).

Der Verf. gibt in dieser Arbeit Ergänzungen und Vereinfachungen seiner früheren Abhandlung „Allgemeine Idealtheorie“ [Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **71**, 8 (1926)], die in wenig geänderter Form als 13. Kapitel in dem Buch „Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927“ abgedruckt ist. Diese grundlegende Abhandlung hat die Entwicklung der Zahlentheorie hyperkomplexer Systeme nachhaltig beeinflußt (Artin, Hasse, Ref.). Ein brauchbares Referat, auf das verwiesen werden könnte, ist leider nicht vorhanden [das in dem Jb. Fortschr. Math. **52**, 128—129 (1926, erschienen 1935) ist unzureichend]. Man vergleiche deshalb den hier in Betracht kommenden Teil der Hasseschen Besprechung des Dicksonschen Buches [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **37**, 96 (1928)]. — In einer einfachen Algebra im Gebiet der rationalen Zahlen (tatsächlich ist der Ausgangspunkt allgemeiner, was aber für die Hauptresultate nicht von Interesse ist) wird das Restesystem einer Ordnung, die zwar höchsten Rang hat, sonst aber beliebig ist, nach einer Primzahlpotenz als Modul betrachtet. In diesem Restesystem auftretende Unregelmäßigkeiten werden schrittweise durch Aufsteigen zu umfassenderen Ordnungen beseitigt, bis man schließlich für maximale Ordnungen klare Gesetzmäßigkeiten erhält. Diese Methode liefert zwar auch Erkenntnisse über



nicht maximale Ordnungen, bringt aber naturgemäß Komplikationen mit sich, die vermieden werden, wenn man, wie es in der neuen Abhandlung geschieht, gleich von vornherein Bedingungen zugrunde legt, wie sie maximalen Ordnungen entsprechen. Darin bestehen die Vereinfachungen dieser Abhandlung im Vergleich zu der früheren. — Die Ergänzungen aber bestehen darin, daß der Anschluß hergestellt wird zu Begriffsbildungen, die vom Ref. aufgestellt worden sind (Gruppoid der Ideale und seine graphische Darstellung). Das war zwar teilweise schon von Artin [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5, 261 (1927)] und vollständiger von Hasse (dies. Zbl. 1, 198) geschehen, aber nur unter Herbeiziehung neuer Hilfsmittel. Hier wird gezeigt, daß die ursprünglichen Methoden zu diesem Ziel vollständig ausreichen. Sie ermöglichen die Konstruktion aller maximalen Ordnungen und ihrer Ideale und geben Auskunft über die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen. *Brandt* (Halle a. d. S.).

**Margossian, A.: Carrés latins semi-diagonaux.** Enseignement Math. 34, 365 bis 377 (1936).

Sätze über „lateinische“ und Eulersche Quadrate. Ohne Beweise. Beispiele. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

**Zia-ud-Din, M.: Recurrence formulae for Bernoulli's numbers.** Math. Student 3, 141—151 (1935).

Herleitung einer Formel von Bernoulli und einiger weiterer Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen. Das Haupthilfsmittel ist ein Satz von Kostka über Determinanten aus den Koeffizienten zweier reziproker Potenzreihen, angewendet auf die beiden Reihen

$(e^z - 1)/z = 1 + z/2! + z^2/3! + \dots$  und  $z/(e^z - 1) = 1 - \frac{1}{2}z + B_1 z^2/2! - B_2 z^4/4! + B_3 z^6/6! - \dots$  (die Bernoullischen Zahlen sind nach der älteren Weise bezeichnet). *L. Schrutka*.

**Kalmár, László: Über den Fundamentalsatz der Zahlentheorie.** Mat. fiz. Lap. 43, 27—45 u. dtsh. Zusammenfassung 45 (1936) [Ungarisch].

Für den Fundamentalsatz der Zahlentheorie von der eindeutigen Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte von Primzahlen werden einige Beweise gegeben, die von dem Begriff des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen unabhängig sind. Sie beruhen auf dem Lemma: Gilt die Gleichung  $ab = cd$ , mit nichtnegativen ganzen Zahlen  $a, b, c, d$ , so gibt es vier weitere nichtnegative ganze Zahlen  $t, u, v, w$ , so daß  $a = tu$ ,  $b = vw$ ,  $c = tv$ ,  $d = uw$ . Dieser „Vierzahlensatz“ wird natürlich ohne Hilfe des Fundamentalsatzes bewiesen. *Otto Szász*.

**Lehmer, D. H.: On the converse of Fermat's theorem.** Amer. Math. Monthly 43, 347—354 (1936).

Ist  $p$  eine Primzahl, so ist  $2^p - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Die Umkehrung ist jedoch nicht richtig. Verf. gibt nun das Verzeichnis von allen 526 zusammengesetzten Zahlen  $n < 10^8$ , die keinen Faktor  $\leq 313$  haben und für welchen  $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$  ist. Damit hat er ein sehr bequemes Mittel geschaffen, um mit geringem Rechenaufwand auszumachen, ob eine gegebene Zahl  $n < 10^8$  Primzahl ist oder nicht: Man suche erstens, ob die Zahl  $n$  sich in dem Verzeichnisse vorfindet; im bejahenden Fall findet man den kleinsten Faktor in der Tabelle; im gegengesetzten Fall kann man in wenigen Minuten mit einer Rechenmaschine einen etwaigen Faktor  $\leq 313$  finden. Gibt es einen solchen nicht, so berechnet man den Rest von  $2^n - 2 \pmod{n}$ . Ist dieser  $= 0$ , so ist  $n$  eine Primzahl und sonst nicht. Die Berechnungsweise der Tabelle wird ausführlich auseinandergesetzt. *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

**Dickson, L. E.: Universal Waring theorems.** Mh. Math. Phys. 43, 391—400 (1936).

The author announces proof of the theorem: Every positive integer is the sum of at most 4223 twelfth powers, whereas the number 528383 cannot be represented by fewer twelfth powers. Similar theorems are announced for  $n$ -th powers with  $n = 13, 14, 15$ , and 17. For all numbers greater than definitely stated limits, fewer powers suffice,



for example, all numbers above  $2 \cdot 3^{12}$  are sums of not more than 2757 twelfth powers. Details are given only for  $n = 14$ . The results obtained were made possible by the recent work of Vinogradow (this Zbl. 12, 196). *D. H. Lehmer* (Bethlehem, Pa.).

**Corput, J. G. van der:** Über einige Vinogradoffsche Methoden. III. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 590—595 (1936).

Diese III. Mitteilung enthält den Beweis von Satz 10 aus Mitteilung II; um den Beweis führen zu können, wird zunächst eine obere Schranke für eine gewisse Summe in Hilfssatz 8 hergeleitet. (II. vgl. dies. Zbl. 13, 393.) *K. Mahler* (Krefeld).

**Vinogradow, I.:** On fractional parts of certain functions. Ann. of Math., II. s. 37, 448—455 (1936).

Das Hauptresultat dieser Arbeit lautet: Let  $n$  be a constant integer  $\geq 18$ ,  $\nu = \frac{1}{n}$ ;  $f(z) = \alpha z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n$  be a polynomial with real coefficients and besides  $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$ ;  $(a, q) = 1$ ;  $q > 0$ ;  $|\theta| \leq 1$ . Then it is possible to determine a constant  $c$ , depending only on  $n$ , such that for every real  $\beta$  we can satisfy the system of inequalities  $|f(z) - u - \beta| \leq c q^{-\delta}$ ;  $\delta = \frac{\nu^3}{15 \log 4n}$ ,  $0 < z \leq q^{2\nu - 2\nu^2}$  with integral  $z$  and  $u$ . Diesen Satz hat Verf. inzwischen in einer Arbeit: Approximation by mean of fraction parts of a polynomial, Rec. math. Soc. math. Moscou 43, 1 (1936), verallgemeinert. Auch bewies Verf. ein analoges Resultat, aber nicht für ein Polynom, sondern für eine Funktion  $f(x)$ , deren  $n$ -te Ableitung zwischen gegebenen Grenzen liegt. (See this Zbl. 14, 11.) *Lubelski* (Warschau).

**Fiala, F., et J. Besse:** Sur une démonstration classique de la transcendance du nombre  $e$ . Enseignement Math. 34, 359—364 (1936).

Der erste Hermitesche Beweis der Transzendenz von  $e$  (s. Œuvres 3, 150—181) enthält bekanntlich eine kleine Lücke; die beiden Verff. bemühen sich, diese auszufüllen. Es handelt sich darum zu zeigen, daß kein Ausdruck  $\mathfrak{N} = N + N_1 e^a + \dots + N_n e^h$  verschwindet, wenn die Koeffizienten  $N, \dots, N_n$  ganz rational und nicht alle Null, die Exponenten  $0, a, b, \dots, h$  ganz rational und monoton wachsend sind, also etwa ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich  $-k, -k+1, \dots, 0, \dots, k-1, k$  sind.

— Sei  $\mu$  eine große natürliche Zahl,  $f(z) = z(z-a) \dots (z-h)$ ,  $\mathfrak{F}(z) = \frac{f(z)^\mu}{\mu!}$ ,  $\mathfrak{F}(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \dots$ ; dann wird  $\mathfrak{F}(0)\mathfrak{N} = (N\mathfrak{F}(0) + N_1\mathfrak{F}(a) + \dots + N_n\mathfrak{F}(h)) + \varepsilon_\mu$ , wo die Klammer ganz rational, dagegen  $|\varepsilon_\mu|$  beliebig klein ist. Indem man annimmt, daß  $\mathfrak{N} = 0$  ist und der Reihe nach  $\mu$  durch  $\mu, \mu+1, \dots, \mu+n$  ersetzt, folgt also das Verschwinden der Determinante

$$\Delta_\mu^* = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_\mu(0) & \dots & \mathfrak{F}_\mu(h) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{F}_{\mu+n}(0) & \dots & \mathfrak{F}_{\mu+n}(h) \end{vmatrix},$$

und da Hermite  $\Delta_\mu^*$  für großes  $\mu$  asymptotisch darstellen kann, erhält er hieraus im allgemeinen einen Widerspruch. Die Verff. entwickeln statt dessen die Quotienten der Glieder gleicher Spalten asymptotisch; ihr Ergebnis lautet, daß  $\Delta_\mu^*$  bis auf einen von  $\mu$  abhängigen Faktor gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f(p) & \dots & f(s) \\ \vdots & & \vdots \\ f(p)^{n-1} & \dots & f(s)^{n-1} \end{vmatrix}$$

ist, wo  $p, \dots, s$  die Abszissen der verschiedenen Maxima von  $|f(z)|$  sind, und es gelingt wegen der speziellen Wahl der  $0, a, \dots, h$  zu zeigen, daß diese Vandermondesche Determinante  $\neq 0$  ist und also ein Widerspruch vorliegt. *K. Mahler* (Krefeld).



## Gruppentheorie.

**Fitting, Hans:** Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. *Math. Z.* 41, 380—395 (1936).

Untersucht werden beliebige Gruppen  $\mathfrak{G}$  mit oder ohne Operatoren. Wenn  $\mathfrak{G}$  direktes Produkt der Faktoren  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_r$  ist, und  $\mathfrak{F}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) direktes Produkt der Faktoren  $\mathfrak{F}_{ik}$  ( $k = 1, \dots, n_i$ ) ist, so nennt Verf. die direkte Zerlegung von  $\mathfrak{G}$ , die entsteht, wenn für  $\mathfrak{F}_i$  das Produkt der  $\mathfrak{F}_{ik}$  eingesetzt wird, eine „Verfeinerung“ der ersten direkten Zerlegung. Es werden zwei verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine direkte Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  mit einer bestimmten anderen eine gemeinsame Verfeinerung besitzt, sodann eine ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine direkte Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  mit jeder anderen eine gemeinsame Verfeinerung besitzt. Schließlich werden die Gruppen charakterisiert, deren je zwei direkte Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen. Zu diesen Gruppen gehören insbesondere die, die mit ihrer Kommutatorgruppe identisch sind, und die, deren Zentrum keine nichttriviale zulässige Untergruppe besitzt. Der letzte Satz gestattet Verf., ein Beispiel einer abzählbaren Gruppe anzugeben, die direkt zerlegbar ist und keinen von der Identität verschiedenen direkt-unzerlegbaren Faktor besitzt. Verf. sagt daher dann mit Recht, „daß der Satz über die Existenz direkter Produktzerlegungen endlicher Gruppen in direkt-unzerlegbare Faktoren im allgemeinen auch nicht durch Einführung direkter Produkte unendlich vieler Faktoren auf unendliche Gruppen übertragen werden kann“. Daß dieser Satz nicht übertragbar ist, wird aber bereits durch ein einfacheres Beispiel einer abzählbar-unendlichen abelschen Gruppe gezeigt, die direkt zerlegbar ist, aber in jeder direkten Zerlegung einen direkt-zerlegbaren Faktor enthält [Prüfer, *Math. Z.* 17, 35 (1923)].

Ulm (Münster i. W.).

**Hall, P.:** The Eulerian functions of a group. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 134 bis 151 (1936).

Verf. verallgemeinert die Eulersche Funktion  $\varphi(n)$ , indem er die Anzahl  $\varphi_n(G)$  der verschiedenen geordneten  $n$ -gliedrigen Folgen  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  einführt, die eine endliche Gruppe  $G$  erzeugen. Gibt es keine  $n$ -gliedrige Folge, die  $G$  erzeugt, so setzt der Verf.  $\varphi_n(G) = 0$ . Ist insb.  $G$  zyklisch von der Ordnung  $m$ , so ist  $\varphi_1(G)$  eine gewöhnliche Eulersche Funktion  $\varphi(m)$ . — Noch allgemeiner definiert der Verf.  $\varphi_F(G)$  als die Anzahl  $n$ -gliedriger Folgen  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , die einer Anzahl Relationen  $f(X) = 1$  genügen, die eine (im allg. unendliche) Gruppe  $F$  definieren.  $\varphi_F(G)$  ist durch die Ordnung  $a(G)$  des Holomorphs von  $G$  teilbar:  $\varphi_F(G) = a(G) \cdot d_F(G)$ , wobei  $d_F(G)$  der Anzahl der verschiedenen Normalteiler  $D$  von  $F$  gleich ist derart, daß  $F/D \cong G$  gilt. — Sodann definiert der Verf. die Funktion  $\mu_s(H)$ , die die Dedekindsche summatorische Umkehrungsformel zuläßt: Aus  $g(H) = \sum f(K)$  folgt  $f(G) = \sum \mu_s(H) g(H)$  (vgl. L. Weisner, dies. Zbl. 12, 393—394). Ist dann  $\sigma_F(H) = \sum_{K \leq H} \varphi_F(K)$ , so ist  $\sigma_F(H)$

die Anzahl der Lösungen der definierenden Gleichungen  $f(X) = 1$  der Gruppe  $F$ , wobei die  $X_i$  in  $H$  liegen. — Diese Formeln verwendet der Verf. für einige spezielle Gruppen.

N. Tschebotarow (Kasan).

**Marty, F.:** Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle. *Ann. École norm., III.* s. 53, 83—123 (1936).

In einem ersten Kapitel wird der Begriff der „Hypergruppe“ eingeführt. Sie unterscheidet sich von der Gruppe dadurch, daß die Verknüpfung mehrdeutig ist. Ist  $G_1$  eine invariante Untergruppe einer Gruppe  $G$  und sind  $A$  Elemente von  $G$ , so bilden bekanntlich die Klassen  $A \cdot G_1$  eine Gruppe, die Faktorgruppe. Ist  $G_1$  eine allgemeine, nicht notwendig invariante Untergruppe von  $G$ , so betrachtet Verf. die „Kategorien“  $G_1 A G_1$ . Sie bilden die Faktorhypergruppe  $G/G_1$ . Verf. verdeutlicht den Begriff am Beispiel der Permutationsgruppe:  $G_1$  sei die Untergruppe, die ein Symbol, etwa 1, ungeändert läßt. Die Permutationen von  $G$  mögen ein Symbol  $a_0$



in  $a_1, a_2, \dots, a_n$  überführen; Verf. faßt  $a_0, a_1, \dots, a_n$  zu einer Kategorie von Symbolen zusammen. Führt etwa  $A$  das Symbol 1 in  $a_0$  über, so führen die Permutationen der Kategorie  $G_1 A G_1$ , und nur diese, das Symbol 1 in ein Symbol der Kategorie  $a, a_1, \dots, a_n$  über. — Die Begriffe und Sätze über Homomorphie und Isomorphie werden übertragen, doch zeigt es sich, daß es vier verschieden starke Möglichkeiten der Beziehung zweier Hypergruppen gibt. — Im zweiten, topologischen Kapitel überträgt Verf. den Begriff der Deckbewegung eines Komplexes ins Mehrdeutige, indem er von der Monodromiegruppe auf eine Faktorhypergruppe übergeht. Also z. B.:  $K$  sei ein Überlagerungskomplex von  $\tilde{K}$ .  $S_i$  sei  $\tilde{S}$  überlagert.  $G$  sei die Gruppe der Wege auf  $\tilde{K}$ , die von  $\tilde{S}$  nach  $\tilde{S}$  zurückführen. Ein Element  $S_i$  von  $K$  gehe durch Bewegung längs eines Weges  $C$  aus  $G$  in  $S_j$  über.  $G_1$  sei die Untergruppe von  $G$ , bestehend aus allen Wegen, die  $S_i$  nach  $S_i$  zurückbringen. Setze ich  $C$  rechts und links mit  $G$  zusammen, so erhalte ich eine Kategorie  $G_1 C G_1$  von Wegen, die  $S_i$  nach  $S_j, S_k \dots$  bringen. Diese mehrdeutige Zuordnung von  $S_i$  zu  $S_j, S_k, \dots$  nennt Verf. eine Deckbewegung. — Außerdem betrachtet Verf. die Berührungsmatrix eines simplizial zerlegten Komplexes; die Zeilen und Kolonnen entsprechen den einzelnen Simplexen. Ein Element  $a_{ik}$  sei dem Betrage nach 1 oder 0, je nachdem die beiden Simplexe  $S_i$  und  $S_k$  eine ganze Seitenfläche  $n-1$ -te Dimension gemein haben oder nicht. Das Vorzeichen wird durch die Orientierung bestimmt. Die Berührungsmatrix ist das Produkt der Inzidenzmatrix mit ihrer Transponierten. Mit ihrer Hilfe gewinnt Verf. eine Übersicht über alle möglichen verzweigten Überlagerungsflächen des Komplexes. — So bemerkenswert diese Begriffsbildungen auch an sich sein mögen, so tritt ihre eigentliche Bedeutung doch erst im dritten Kapitel zutage, wo sie Verf. auf algebraische Funktionen anwendet. Definiert man die Verknüpfung von  $f(x)$  und  $g(x)$  durch  $f[g(x)]$ , so bilden die algebraischen Funktionen eine Hypergruppe. Jede endliche Hypergruppe algebraischer Funktionen ist isomorph mit der Automorphismenhypergruppe eines rationalen Bruches. Verf. stellt die Frage nach den Darstellungen eines rationalen Bruches  $R(x)$  in der Form  $R_1\{R_2[\dots R_n(x)\dots]\}$ , wo  $R_1(x), R_2(x), \dots$  nichthomographische Brüche sind. Jeder solchen Zerlegung entspricht eineindeutig eine „Kompositionsreihe“ der Automorphismenhypergruppe, wobei aber von den Unterhypergruppen in keinem Fall vorausgesetzt wird, sie seien invariant. Der Grad der Brüche ist gleich dem Index zweier aufeinanderfolgender Hypergruppen der Reihe. Die Beziehung zur Galoisschen Theorie ist augenfällig. — Schließlich untersucht Verf. noch, welche Gruppen in Frage kommen und zu welchen Typen rationaler Brüche sie führen können. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

**Brauer, Richard:** Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen. *Math. Z.* **41**, 330—339 (1936).

Es wird bewiesen: Sind alle Darstellungen der Form  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$  einer gegebenen Halbgruppe  $\mathcal{G}$ , wobei  $A$  irreduzibel ist, vollständig reduzibel, so sind alle Darstellungen von  $\mathcal{G}$  vollständig reduzibel. Dasselbe gilt für eine Infinitesimalgruppe  $\mathfrak{g}$ , wenn unter Darstellung von  $\mathfrak{g}$  eine Zuordnung  $a \rightarrow A$  mit  $\lambda a \rightarrow \lambda A$ ,  $a + b \rightarrow A + B$ ,  $[a, b] \rightarrow AB - BA$  verstanden wird. Auf Grund des letzten Satzes wird der von Casimir und v. d. Waerden gegebene Beweis der vollen Reduzibilität aller Darstellungen einer halbeinfachen Infinitesimalgruppe [*Math. Ann.* **111**, 1 (1935); dies. Zbl. **11**, 11] stark vereinfacht. *van der Waerden* (Leipzig).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Sierpiński, W.:** Sur les images biunivoques et continues dans un sens. *Fundam. Math.* **26**, 44—49 (1936).

Two sets  $E, H$  are of the same type  $c$  if each is a continuous image of the other (*Fundam. Math.* **14**, 345). If  $E$  is a biunivocal and continuous image of  $H$ , and  $H$



is a biunivocal and continuous image of  $E$ , then  $E$  and  $H$  have the same type  $\gamma$ , written  $\gamma E = \gamma H$ . Inequality of types  $\gamma$  is defined naturally. Let  $\Gamma(E)$  be the family of all sets  $H$  of a given metric space which are continuous and biunivocal images of  $E$ . Then,  $\gamma E < \gamma H$  is equivalent to  $\Gamma(E) < \Gamma(H)$ , and  $\gamma E = \gamma H$ , is equivalent to  $\Gamma(E) = \Gamma(H)$ . Two homeomorphic sets have the same type  $\gamma$ , and two sets of the same type  $\gamma$  have the same type  $c$ . Thus the types  $\gamma$  occupy a place between the types of homeomorphy and the types of continuity. If  $\Phi$  is closed and compact and  $\gamma E < \gamma \Phi$  then  $\gamma E = \gamma \Phi$ . Consequently, among the types  $\gamma$  of countable linear sets there is no least. Also, among the types of the linear sets of the power of the continuum, there is no least. But, among the types  $\gamma$  of the countable linear sets there is a greatest, that of the set  $E_0$  of the positive integers. Among the types  $\gamma$  which are less than  $\gamma E_0$  there is one which is greater than all the others, that of the type  $\gamma$  of the countable non closed sets having but one point of accumulation. Two sets of the same type  $\gamma$  need not be homeomorphic. There is a transfinite increasing (decreasing) sequence of types  $\gamma$  of countable linear sets of the ordinal type  $\Omega$ . Every reducible linear (clairsemé) set has the same type as a closed set. The family of all types  $\gamma$  of reducible sets is of the power  $\aleph_1$ . It is probable that the family of all types  $\gamma$  of countable linear sets has the power  $\aleph_1$ . For Borel measurable sets there is a type  $\gamma$  which is greater than any different type, there are  $2^{\aleph_0}$  types. There are  $2^{2^{\aleph_0}}$  different types  $\gamma$  of linear sets of power  $2^{\aleph_0}$ . For every type  $\gamma$  of a linear set of the power of the continuum, there are  $2^{2^{\aleph_0}}$  different greater types.

Chittenden (Iowa).

**Sierpiński, Waclaw:** Sur une fonction non mesurable, partout presque symétrique. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 1—6 (1936).

Existenzbeweis einer reellen nichtmeßbaren (übrigens in jeder perfekten Menge unstetigen) Funktion  $f(x)$ , die überall fastsymmetrisch ist. Fastsymmetrie in einem Punkte  $a$  bedeutet hier, daß  $f(a+x) = f(a-x)$  für fast alle  $x$ , d. h. mit Ausnahme von  $< 2^{\aleph_0}$   $x$ -Werten gilt. Gegeben wird  $f(x)$  als charakteristische Funktion einer (nichtmeßbaren) linearen Menge, die in bezug auf jedes reelle  $a$  fastsymmetrisch (im geometrischen Sinne) liegt; vgl. die Verwendung vom Verf. einer zu dieser Rotations-eigenschaft analogen Translationseigenschaft einer entsprechenden linearen Menge (dies. Zbl. 5, 197) zur Konstruktion einer Funktion, die jedes reelle  $a$  zur „Fastperiode“ hat. — Unter weiteren Eigenschaften von  $f(x)$  sind folgende zu erwähnen: 1. approximative Symmetrie überall, d. h. daß in jedem reellen  $a$  die Menge der  $x$ -Werte, welche der Gleichung  $f(a+x) = f(a-x)$  genügen, von der äußeren Dichte 1 ist; 2. Nullität überall der approximativen symmetrischen Derivierten, d. h. daß in jedem reellen  $a$  für beliebiges  $\varepsilon > 0$  die Menge der Zahlen  $h \neq 0$ , die der Ungleichung  $\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| < \varepsilon$  genügen, von der äußeren Dichte 1 ist. — Die Arbeit enthält auch einen direkten, von S. Ruziewicz stammenden Existenzbeweis von Funktionen mit den beiden Eigenschaften 1., 2. mit Hilfe der Hamelschen Basis.

B. Knaster (Warszawa).

**Besicovitch, A. S.:** On differentiation of functions of two variables. Math. Z. 41, 402—404 (1936).

The author calls the point  $x_0$  a Denjoy point of the function  $f(x)$ : (1) if  $f(x)$  is differentiable at  $x_0$ ; (2) if the rays from the point  $x_0$  of the curve  $y = f(x)$  to infinitely near points of the curve fill up half a plane; or: (3) if these rays fill up the whole plane. The point  $(x_0, y_0)$  is called a Denjoy point of  $f(x, y)$  if it is a Denjoy point on every line through  $(x_0, y_0)$ . While for every finite function of a single variable almost all points are Denjoy points, there is given here an example of a continuous function of two variables, defined in the points of a square  $S$ , for which not almost all points of  $S$  are Denjoy points.

J. Ridder (Groningen).



**Haslam-Jones, U. S.: Tangential properties of a plane set of points.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 116—123 (1936).

L'auteur appelle une demi-droite  $\theta$  issue d'un point  $a$  rayon dérivé d'un ensemble  $E$  dans le point  $a$  lorsqu'il existe une suite de points  $x_n \in E$  convergant vers  $a$  et telle que les demi-droites  $ax_n$  tendent vers  $\theta$ . Un angle (non-nulle) formé par deux rayons dérivés  $\theta_1$  et  $\theta_2$  d'un ensemble  $E$ , issus d'un même point  $a$ , s'appelle secteur vide de  $E$  en  $a$ , lorsque, exceptée les demi-droites  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , il ne contient plus des rayons dérivés de  $E$ . Enfin, un point limite de l'ensemble  $E$  est dit point frontière de  $E$  lorsqu'il existe un secteur vide de  $E$  dans ce point. L'auteur prouve le théorème suivant dont la partie essentielle (III) a été signalée sans démonstration par MM. Kolmogoroff et Verčenko [C. R. Acad. Sci. URSS 4, 361—364 (1934); ce Zbl. 11, 107]: Etant donné un ensemble plan  $E$ , (I) tous les points frontières de  $E$  sont situés sur une infinité au plus dénombrable de courbes rectifiables, (II) les points frontières de  $E$  où il existe un secteur vide d'ouverture  $> \pi$ , forment un ensemble au plus dénombrable, et (III) les points frontières où il existe un secteur vide d'ouverture  $< \pi$ , forment un ensemble de longueur nulle. Ce théorème, appliqué aux images des fonctions  $y = f(x)$ , donne immédiatement les relations bien connues de Denjoy-Young entre les nombres dérivés extrêmes des fonctions arbitraires. — D'après un théorème connu, l'ensemble des valeurs qu'une fonction  $f(x)$  quelconque prend aux points où un au moins des quatre dérivés extrêmes s'annule, est de mesure nulle. L'auteur établit la généralisation suivante de ce théorème: Si, dans tout point d'un ensemble  $A \subset E$ , il existe un secteur vide de  $E$  tel que l'un de deux rayons dérivés faisant ce secteur est parallèle à une droite fixe  $\alpha$ , la projection orthogonale de  $E$  sur la droite perpendiculaire à  $\alpha$  est de mesure nulle. Saks (Warszawa).

**Randolph, John F.: Some density properties of point sets.** Ann. of Math., II. s. 37, 336—344 (1936).

Sei  $A$  eine ebene Punktmenge mit endlichem Carathéodoryschen äußeren Linearmaße  $L^*A$ ,  $p$  ein in derselben Ebene gelegener Punkt,  $r$  eine nichtnegative Zahl. Mit  $c(p, r)$  bezeichne man die Menge derjenigen Punkte, welche von  $p$  eine Entfernung  $\leq r$  besitzen. Die Funktion  $\bar{D}^*(A, p) = \lim_{r=0} \frac{L^*A \cdot c(p, r)}{2r}$  ist linear meßbar. Verf. nennt sie: die obere äußere Dichtigkeitsfunktion. Ähnlich definiert er die untere äußere, die obere und untere innere Dichtigkeitsfunktion. Sie erweisen sich auch als linear meßbar. — Sei nun  $\Gamma_1$  die Menge derjenigen Punkte  $p$  des Komplements von  $A$ , in welchem  $\bar{D}^*(A, p) > 0$ . Die Menge  $A + \Gamma_1$  ist immer linear meßbar, und dann und nur dann ist  $A$  selbst meßbar, wenn  $L^*\Gamma_1 = 0$ . Weiter ist:  $\alpha)$   $L^*(A + \Gamma_1) = L^*A$ ,  $\beta)$   $L^*A = L^*A - L_*A$ . Es folgen Sätze über den Zusammenhang von Dichtigkeitsfunktionen zweier Punktmengen. Diese erlauben ihm, einen Satz von Besikovitch über Existenz von Tangentialrichtungen bei linear meßbaren Punktmengen auf nicht-meßbare Mengen zu übertragen. Endlich zeigt Verf., wie man ähnliche Ergebnisse auch für das innere Linearmaß erhalten kann. Schauder (Lwów).

**Randolph, J. F.: On generalizations of length and area.** Bull. Amer. Math. Soc. 42, 268—274 (1936).

Sei  $A$  eine linear im Sinne von Carathéodory meßbare Menge mit endlichem Maße  $L(A)$ , welche in der  $x, y$ -Ebene gelegen ist; mit  $J_h$  bezeichne man die im  $x, y, z$ -Raume gelegene „Zylindermenge“ mit  $A$  als Projektion auf die  $x, y$ -Ebene und mit  $0 \leq z \leq h$ . Sei  $L^{(2)}J_h$  das zweidimensionale Carathéodorysche Maß von  $J_h$ . Verf. stellt sich nun die Frage: Ist allgemein  $L^{(2)}J_h = hL(A)$ ? Ähnlich sei  $\Lambda(A)$  das lineare Großsche Maß von  $A$  und  $\Lambda^{(2)}J_h$  das Großsche Flächenmaß von  $J_h$ . Frage:  $\Lambda^{(2)}J_h = h\Lambda(A)$ ? Verf. kann nur beweisen: a)  $L^{(2)}J_h \leq hL(A)$ , b)  $\Lambda^{(2)}J_h \geq h\Lambda(A)$ . Dabei werden die Maße so definiert, daß sie dem Hahnschen Regularitätsaxiome (welches das fünfte Regularitätsaxiom von Carathéodory für allgemeine Maße er-



setzt) genügen. Falls also  $L(A) = \Lambda(A)$ , so ist auch  $L^{(2)}J_h = h J(A)$ . Der Verf. stellt weiter hinreichende (aber wie er zeigt keineswegs notwendige) Bedingungen für die Gleichheit  $L(A) = \Lambda(A)$  auf. Schauder (Lwów).

**Morrey jr., Charles B.:** An analytic characterization of surfaces of finite Lebesgue area. II. Amer. J. Math. 58, 313—322 (1936).

The characteristic property, referred to in the title, is the existence of a hemi-cactoid  $\tilde{H}$  on which the given continuous surface  $S$  may be represented continuously, the representation being generalized conformal on every non-degenerate cyclic element of  $\tilde{H}$ , with the function  $M$  (ratio of corresponding line-elements) summable on  $\tilde{H}$ . The terms used in this statement were explained in previous papers of the author, reviewed in this Zbl. 12, 204 and 11, 37. The proofs depend upon topological results concerned with the structure of continuous surfaces and upon the existence of conformal maps for polyhedrons. Tibor Radó (Columbus).

## Analysis.

**Maurer, H.:** Umwandlung des Bogenintegrals von Kurven mit Hilfe der Abwicklung durch sie gelegter Flächen. Deutsche Math. 1, 308—311 (1936).

**Mehmke, R.:** Über die sogenannten Integralsätze von Stokes und von Gauß und ihre Verallgemeinerungen. Mh. Math. Phys. 43, 275—280 (1936).

This paper gives a derivation by means of Grassmann's extensional calculus of the well-known generalized Stokes' formula which states the equivalence of an integral over a closed spread and a related integral over the open spread (of dimensionality greater by one) which it bounds. The paper restricts itself (unnecessarily) to Euclidean spaces. Murnaghan (Baltimore).

**Dixon, A. L., and W. L. Ferrar:** A class of discontinuous integrals. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 81—96 (1936).

The integrals considered are

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\prod \{ \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 s) \}}{\prod \{ \Gamma(\beta_1 + \beta_2 s) \}} z^{-s} ds,$$

where the products contain any finite number of terms. It is shown that there are four types, depending on the values of the  $\alpha$ 's and  $\beta$ 's. — Certain real integrals of the form

$$\int_0^\infty f(t) f(at) t^{-\lambda} dt,$$

e.g. if  $f(t)$  is a Bessel function, can be made to depend on integrals of the above type by means of Mellin transforms, and the nature of their discontinuities thus found.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Poritsky, Hillel:** Heaviside's operational calculus. Its applications and foundations. Amer. Math. Monthly 43, 331—344 (1936).

**Humbert, Pierre:** Le calcul symbolique à deux variables. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 56, 26—43 (1936).

This paper contains a collection of formal results connected with the theory of Laplace transformations of functions of two variables. If

$$f(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px - qy} h(x, y) dx dy$$

$f$  is called the image of  $h$  and the relationship is indicated by the symbol  $f \doteq h$ . Amongst the results obtained in the paper are the following:



1. If  $f(p) \doteq h(x)$ ,  $\frac{qf(p) - pf(q)}{q - p} \doteq h(x + y)$ ,
2.  $\frac{pq}{pq - 1} \doteq J_0(2i\sqrt{xy})$ ,
3.  $\frac{\sqrt{\pi pq}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \doteq \frac{1}{\sqrt{x + y}}$ .

*Murnaghan* (Baltimore).

**Szegő, G.:** Über räumliche harmonische Entwicklungen, welche in der Einheitskugel positiv sind. *Mh. Math. Phys.* **43**, 148—156 (1936).

Corresponding to each function  $F(x, y, z)$ , harmonic and positive within the unit sphere about the origin  $O$ , let  $S_n(F; x, y, z)$  be the sum of the first  $n + 1$  terms in its development

$$F(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} K_k(x, y, z),$$

where  $K_k$  is a spherical harmonic of order  $k$ . Let  $r_n$  be the largest  $r$  such that  $0 < S_n(F; x, y, z)$  for every  $F$  and all  $(x, y, z)$  within the sphere of radius  $r$  about  $O$ . The author first points out that  $r_n$  is the smallest  $r$  for which the polynomial

$$S_n(r, \gamma) = \sum_{k=0}^n (2k + 1) r^k P_k(\cos \gamma),$$

where  $P_k(u)$  is Legendre's polynomial of degree  $k$ , vanishes for some  $\gamma$  on the interval  $0 \leq \gamma \leq \pi$ . By this means he obtains the following asymptotic formula for  $r_n$ :

$$r_n = 1 - (2 \log n - \log \log n + \lambda + \varepsilon_n)/n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

where, if  $n$  is odd,  $\lambda = \log 2$ , and if  $n$  is even,  $\lambda = -0.4028 \dots = \log 2\mu$ ,  $\mu$  = minimum value for real  $x$  of Bessel's function  $J_0(x)$  of order 0. The corresponding result for two dimensions was obtained by Schur and Szegő [*S.-B. preuß. Akad. Wiss.* **30**, 545—560 (1925)].

*J. J. Gergen* (Rochester).

**Riesz, Friedrich:** Eine Ungleichung für harmonische Funktionen. *Mh. Math. Phys.* **43**, 401—406 (1936).

Let  $f(\theta)$  be a real or complex function of bounded variation,  $u(r, \theta)$  the corresponding harmonic function of the polar coordinates  $r < 1$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  having the boundary values  $f(\theta)$  for  $r \rightarrow 1$ . The total variation of  $u$  on the real segment  $-1, +1$  cannot surpass the half of the total variation of  $f(\theta)$ . The equality sign can be discussed easily. This statement follows immediately from Poisson's integral and contains as a special case not only an older results of a joint paper of the author and L. Fejér [*Math. Z.* **11**, 305 (1921)] but also a recent result of R. M. Gabriel (*Proc. London Math. Soc.* (2) **39**, 216; this *Zbl.* **11**, 358). Finally a transformation of the statement to a half plane or more generally to an angle is given. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Nevanlinna, Rolf:** Über die Kapazität der Cantorschen Punktmengen. *Mh. Math. Phys.* **43**, 435—447 (1936).

This investigation is an attempt to give a metric characterization of closed two dimensional sets  $\Gamma$  with the capacity  $c(\Gamma) = 0$ . Denote by  $h(r)$  a function continuous and monotonically increasing for  $r \geq 0$ ,  $h(0) = 0$ . Defining the corresponding (exterior) measure  $m(\Gamma, h)$  in the usual way, Myrberg showed [*Acta math.* **61** (1933); this *Zbl.* **7**, 163] that the existence of a function  $h(r)$  with

$$\int_0^{t^{-1}} h(t) dt < \infty, \quad m(\Gamma, h) > 0, \quad (1)$$

implies  $c(\Gamma) > 0$ . The conjecture that

$$\int_0^{t^{-1}} h(t) dt = \infty, \quad m(\Gamma, h) < \infty \quad (2)$$

implies  $c(\Gamma) = 0$  is here proved for "Cantor sets". They arise from the segment  $0, 1$  removing the open segment of the length  $1 - p_1^{-1}$  in the middle and applying the same operation to the remaining segments using a prescribed sequence of numbers



$p_n > 1$ . It is showed that in this case  $c(I) = 0$  is equivalent with the divergence of  $\sum 2^{-n} \log p_n$ . Assuming the divergence of this series there exists indeed an  $h$ -function with the property (2). G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Bohr, H., und W. Fenehel: Ein Satz über stabile Bewegungen in der Ebene.** Danske Vid. Selsk., Skr. 14, 1—15 (1936).

Aus den Untersuchungen von Bendixson folgt, daß die Bahnkurve einer im Poissonschen Sinne stabilen Bewegung eines zweidimensionalen Differentialgleichungssystems geschlossen ist. Hier wird von einer ebenen (stetigen, nicht notwendig differenzierbaren) Bewegung  $x(t)$  nur vorausgesetzt: 1. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß aus  $\varrho[x(0), x(\tau)] < \delta$ ,  $\tau > 0$ , die Ungleichung  $\varrho[x(t), x(\tau + t)] < \varepsilon$  für  $-1 \leq t \leq 1$  folgt; 2. es existiert eine Folge  $t_1, t_2, \dots \rightarrow \infty$  derart, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x(0)$  ist. Dann besitzt die Bahnkurve  $x(t)$  mindestens einen Doppelpunkt. Die Bedingung 1. ist wesentlich; wenn sie nicht erfüllt ist, kann man ein Beispiel einer ebenen doppelpunktfreien grenzperiodischen Bewegung angeben, die natürlich 2. erfüllt. *Stepanoff.*

### Reihen:

**Bailey, W. N.: An algebraic identity.** J. London Math. Soc. 11, 156—160 (1936).

Several years ago Bell found in connection with a problem of the theory of numbers that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} \left( \frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q^2} + \dots + \frac{1}{1-q^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^n}{1-q^n}, \quad |q| < 1.$$

The author gives three different proofs for this interesting identity. G. Szegő.

**Mayrhofer, K.: Reihen von der Form  $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v}{a_v - z}$ .** Mh. Math. Phys. 44, 60—70 (1936).

Extension des résultats obtenus dans un précédent travail (Mh. Math. Phys. 42, 191—206 et 207—209; ce Zbl. 11, 254) au cas où les nombres  $c_v$  sont complexes.

Il en résulte que la série  $\sum \frac{c_v}{a_v - z}$  constitue le développement de Mittag-Leffler de la fonction qui admet les  $a_v$  pour pôles simples avec les  $c_v$  pour résidus, pourvu que cette série converge simplement pour au moins deux valeurs de  $z$ , ou converge absolument pour une seule valeur. Si la série adjointe est convergente, il suffit même que la convergence simple soit assurée pour une seule valeur. Enfin lorsque la convergence a lieu en plus d'un point, elle est nécessairement uniforme. *E. Blanc (Paris).*

**Rey Pastor, J.: Einige Beziehungen zwischen den korrelativen Algorithmen der Konvergenz und Summation.** Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 11, 67—70 (1936) [Spanisch].

**De Franchis, Franco: Estensione alle serie doppie della teoria della sommabilità (C, 1) e applicazioni alle serie doppie di Fourier.** Rend. Circ. mat. Palermo 59, 147—164 (1935).

This paper contains principally (A) a criterion of the Dini type for summability (C; 0, 1) of a double Fourier series, (B) a convergence criterion for double Fourier series, and (C) two analogues of Hardy's theorem [Proc. London Math. Soc. 8, 301 bis 320 (1910)] that the series  $a_1 + a_2 + \dots$  converges to  $S$  if it is summable (C, 1) to  $S$  and  $na_n = O(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . One of the analogues follows. The series  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$  converges to  $S$  if it is summable (C; 1, 1) to  $S$  and  $(m+n) \sum_{p=1}^m a_{p,n}$ ,  $(m+n) \sum_{q=1}^n a_{m,q}$  are bounded independently of  $m, n$ . The proof of (B) is invalid. It is based on the 'fact' that, if  $F(x, y)$  is integrable  $L$  over  $(-\pi, -\pi; \pi, \pi)$  and is of bounded variation in the Tonelli sense (Serie Trigonometriche, 1928) there, then, for  $0 \leq m$ ,  $0 \leq n$ ,

$$(m+1)(n+1) \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx \int_{-\pi}^{\pi} \cos ny \, F(x, y) \, dy \right| \leq M,$$



where  $M$  is independent of  $m, n$ . That this is false can be seen from the function  $F(x, y)$  defined as follows:

$$F(x, y) = y - \pi, \quad 0 < y < x < \pi; \quad \pi - x, \quad 0 < x < y < \pi;$$

$$F(x, y) = F(-x, y) = F(x, -y).$$

[See Hardy, Quart. J. Math. 37, 53—79 (1905) or Titchmarsh, Proc. Roy. Soc. 106, 299—314 (1924).] It might be noted also that the author errs at another point. His theorem that the sequence  $\{S_{m,n}\}$  is summable  $(C; 0, 1)$  if  $S_{m,n}$  is bounded independently of  $m, n$ , if, for each  $m$ ,  $S_{m,n}$  tends to a limit  $S_m$ ,  $n \rightarrow \infty$ , and if  $S_m \rightarrow S$ , is plainly false.

J. J. Gergen (Rochester).

**Bosanquet, L. S.: Some arithmetic means connected with Fourier series.** Trans. Amer. Math. Soc. 39, 189—204 (1936).

Let  $f(t)$  be integrable  $L$  on  $(0, 2\pi)$  and periodic with period  $2\pi$ . Let  $x$  be fixed and let  $A_0 + A_1 + \dots$  be the Fourier series of  $f(t)$  at  $t = x$ . This paper is concerned chiefly with conditions for boundedness and summability of the sequence  $\{nA_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . In particular the following results are obtained. (A) If  $0 \leq \alpha < \beta$  and

$$1/t \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^t u |d\varphi_{\alpha}(u)| = O(1) \quad \text{in the interval } (0, \pi), \quad (a)$$

where  $\varphi_0(u) = \frac{1}{2}\{f(x+u) + f(x-u)\}$ ;  $\varphi_{\alpha}(u) = \alpha/u \int_0^u (1-v/u)^{\alpha-1} \varphi_0(v) dv$ ,  $0 < \alpha$ ,

then (b)  $nA_n = O(1) (C, \beta)$ . (B) If  $0 \leq \beta < \alpha - 1$  and

$$1/\omega \int_0^{\omega} u |dr_{\beta}(u)| = O(1), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (c)$$

where  $r_{\beta}(u) = \sum_{p < u} (1-p/u)^{\beta} A_p$ , then (d)  $t\varphi'_{\alpha}(t) = O(1)$  in the interval  $(0, \pi)$ . It is

to be noted that (d) implies (a), and (b) implies (c) if  $1 \leq \beta$ . In addition to the above theorems the author gives the  $o$  analogues, applies (A) to give a summability criterion for the series  $A_0 + A_1 + \dots$ , and, generalizing the conditions (b) and (d) to

$$\left(\omega \frac{d}{d\omega}\right)^{\lambda} r_{\beta}(\omega) = O(1), \quad \omega \rightarrow \infty; \quad \left(t \frac{d}{dt}\right)^{\lambda} \varphi_{\alpha}(t) = O(1) \quad \text{in the interval } (0, \pi),$$

where  $\lambda$  is a non-negative integer, gives a theorem relating these conditions. The problem of the summability of the sequence  $\{nA_n\}$  was treated by Young in 1916. The present paper contains a complete set of references to this and related problems.

J. J. Gergen (Rochester).

**Marcinkiewicz, J., and A. Zygmund: On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series.** Fundam. Math. 26, 1—43 (1936).

Dans ce mémoire plein d'idées et de résultats importants les auteurs emploient systématiquement la sommation  $(C, k)$  par les moyennes arithmétiques comme un moyen puissant d'investigation des propriétés différentielles des fonctions mesurables. Ne pouvant pas, faute de place, citer tous les résultats soulignons le théorème qui paraît être le noyau de tout le travail. Soit  $(\sigma_l)$  la série obtenue en intégrant  $l$  fois,  $1 \leq l \leq k+1$ , terme à terme une série trigonométrique  $(\sigma)$  sommable  $(C, k)$ ,  $k \geq 0$ , avec la somme  $s(x)$  dans un ensemble  $E$ , mes  $E > 0$ . Le th. 10 établit que  $(\sigma_l)$  est sommable  $(C, k-l)$  presque partout dans  $E$ , sa somme  $S(x)$  y étant égale à la  $l^{\text{ième}}$  dérivée approximative (VP) de  $s(x)$  au sens de M. de la Vallée-Poussin, à savoir pour  $h \rightarrow 0$

$$S(x+h) = S(x) + \sum_{i=1}^{l-1} S_{(i)}(x) \cdot \frac{h^i}{i!} + s(x) \cdot \frac{h^l}{l!} + \varepsilon_h(x) \cdot h^l \quad (VP)$$

où  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_h(x) = 0$  si pour chaque  $x$   $h \rightarrow 0$  sur un ensemble  $H_x$  ayant à l'origine  $h = 0$  la densité 1. Le fait que pour  $l > k+1$  la dérivée généralisée  $l^{\text{ième}}$  de  $S(x)$  existe



et est égale partout dans  $E$  était connu depuis une douzaine d'années, mais pour en déduire l'existence presque partout dans  $E$  de la  $l^{\text{ème}}$  dérivée approximative (VP) on doit connaître le th. 1 qui constitue la base du mémoire. Soit  $\Delta_k(x, h)$  la  $k^{\text{ème}}$  différence symétrique de  $f(x)$

$$\Delta_k(x, h) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \cdot f\left(x + mh - \frac{kh}{2}\right).$$

Le th. 1 précise le lieu entre les dérivées généralisées symétriques  $D_k f(x) = \lim_{h=0} \{h^{-k} \cdot \Delta_k(x, h)\}$  et celles (VP) notées  $f_{(k)}(x)$ : si partout dans  $E$ , mes  $E > 0$ , on a

$$\lim_{h=0} |h^{-k} \cdot \Delta_k(x, h)| < \infty$$

la dérivée  $f_k(x)$  existe presque partout dans  $E$  [ce qui assure l'existence des  $f_{(i)}(x)$  pour  $i \leq k-1$ ] et l'on a presque partout dans  $E$  pour  $i \leq k-1$   $f_{(i+1)}(x) = [f_{(i)}(x)]'$ , où  $[\ ]'$  signifie la dérivation approximative. Le th. 2 concerne l'allure de la série conjuguée  $(\bar{\sigma})$  d'une  $(\sigma)$ : Soit  $(\sigma)$  sommable  $(A)$  partout dans  $E$  avec la somme  $s(x)$ ; si  $s_n^{(k)}(x)$  — sa  $n^{\text{ème}}$  moyenne d'ordre  $k$  — vérifie partout dans  $E$  la condition  $\lim_{n=\infty} \bar{s}_n^{(k)}(x) < \infty$  pour  $n \rightarrow \infty$  la série  $(\bar{\sigma})$  est sommable  $(C, k + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , presque partout dans  $E$  vers  $\bar{s}(x)$  et l'on a

$$2s(x) = \lim_{n=\infty} s_n^{(k)}(x) + \lim_{n=\infty} \bar{s}_n^{(k)}(x), \quad 2\bar{s}(x) = \lim_{n=\infty} \bar{s}_n^{(k)}(x) + \lim_{n=\infty} s_n^{(k)}(x).$$

La  $(\bar{\sigma})$  est sommable  $(C, k)$  presque partout dans  $E$ , si  $(\sigma)$  l'est, partout dans  $E$  ( $k > -1$ ). Enfin le chapitre V contient une nouvelle définition  $(T)$  de l'intégrale définie généralisant celle de Denjoy-Perron et qui entraîne l'intégrabilité dans  $(u, 2\pi + u)$  presque partout en  $u$  ( $0 \leq u \leq 2\pi$ ) de la somme  $f(x)$  d'une série trigonométrique convergente partout et qui devient la série de Fourier de  $f(x)$  grâce à cette définition  $(T)$ .

*E. Kogbetliantz (Téhéran).*

### Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

**Rey Pastor, J.:** Über einen Typ linearer Differentialgleichungen. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 11, 71—74 (1936) [Spanisch].

**Mitrinovitch, Dragoslav S.:** Sur l'emploi de la partie réelle et de la partie imaginaire des fonctions analytiques dans l'intégration des équations différentielles. Tôhoku Math. J. 42, 179—184 (1936).

**Mitrinovitch, Dragoslav:** Sur certaines trajectoires des courbes algébriques planes de genre zéro, un et deux. Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 153—160 (1935).

Die Bestimmung der Trajektorien, welche die Kurven einer vom Parameter  $\lambda$  abhängigen algebraischen Schar unter dem Winkel  $\nu(\lambda)$  schneiden, führt auf eine algebraische Differentialgleichung (erster Ordnung und) ersten Grades, wenn die Kurven der Schar das Geschlecht 0 haben, zweiten Grades, wenn das Geschlecht 1 oder 2 ist.

*W. Feller (Stockholm).*

**Mitrinovitch, Dragoslav:** Contribution à l'intégration de l'équation différentielle de J. Liouville. Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 149—152 (1935).

Für den Fall einer Kreisschar kann die im vorangehenden Referat genannte Differentialgleichung auf die Form  $y' + f(x) \cos y + y(x) \sin y + \varphi(x) = 0$  reduziert werden.

*W. Feller (Stockholm).*

**Peyovitch, Tadya:** Contribution à l'étude de la solution asymptotique d'une équation différentielle du premier ordre. Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 161—168 (1935).

In der Gleichung  $dx/dt = a_0 + kx + a_n x^n$  bedeute  $k$  eine reelle nichtverschwindende Konstante,  $n$  eine ganze Zahl größer als 1,  $a_0(t)$  und  $a_n(t)$  Funktionen, die in  $t \geq t_0 \geq 0$  stetig und beschränkt sind; dann besitzt die Gleichung für  $t \geq t_0 \geq 0$  eine beschränkte Lösung.

*Rellick (Marburg, Lahn).*



**Petrovitch, Michel:** Théorème sur l'équation de Riccati. Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 169—180 (1935).

Zu jeder Gleichung  $y' = y^2 + f(x)$  werden unendlich viele Gleichungen  $y' = y^2 + \lambda_i(x)$  angegeben, deren Lösungen explizit bestimmbar sind, sobald die Lösung von  $y' = y^2 + f(x)$  bekannt ist.

*Rellich* (Marburg, Lahn).

**Lemke, H.:** Bemerkungen zur Integration der Differentialgleichung  $\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + Y^2 = g(x)^2$ . Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 201—212 (1935).

Die im Titel genannte Gleichung nimmt nach der Substitution  $Y = \frac{+gy}{\sqrt{1+y^2}}$  folgende Form an:  $\frac{dy}{dx} + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4$ . Diskussion integrierbarer Fälle.

*W. Stepanoff* (Moskau).

**Haag, J.:** Sur les propriétés des intégrales de certaines équations différentielles. Bull. Sci. math., II. s. 60, 131—138 (1936).

Étude des solutions des équations

$$f(x) \frac{dy}{dx} = \pm y + F(x, y); \quad 0 \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad f(x) > 0, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0, \\ |F(x, y') - F(x, y)| < \varphi(x) |y' - y|, \quad \varphi(0) = 0,$$

dans le voisinage de  $x = 0$ , par la méthode des approximations successives; suivant que  $\int_0^a \frac{1}{f(x)} dx$  converge ou diverge, l'origine présente l'aspect d'un point ordinaire ou bien d'un nœud resp. col.

*W. Stepanoff* (Moskau).

**Urbański, W. S.:** Sur la structure de l'ensemble des solutions cycliques d'un système d'équations différentielles. Ann. Soc. Polon. math. 13, 44—49 (1935).

Pour le système  $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $X_i$  analytiques,  $\sum_{i=1}^n X_i^2 > 0$ , les points d'intersection des trajectoires des mouvements périodiques avec une surface de section  $S^{n-1}$  forment un domaine ou bien un ensemble de mesure  $n-1$ -dimensionnelle nulle.

*W. Stepanoff* (Moskau).

**Gillis, Paul:** Sur le second problème aux limites pour les équations de Monge-Ampère du type elliptique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 83—87 (1936).

Die Gleichungen des Titels können bekanntlich höchstens zwei verschiedene Lösungen mit vorgeschriebenen Randwerten in einem gegebenen Gebiete gestatten. Stimmen nun für zwei Lösungen nicht nur die Randwerte, sondern auch die Randwerte ihrer ersten Ableitungen überein, so können sie nicht zwei verschiedene Lösungen sein.

*G. Cimmino* (Napoli).

**Mieghem, Jacques van:** Forme intrinsèque des conditions de compatibilité. Application au calcul des discontinuités des potentiels. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 624—645 (1936).

Es handelt sich um die Kompatibilitätsgleichungen der in dies. Zbl. 5, 207 bis 9, 112 referierten Arbeiten des Verf. Die im Titel genannte Anwendung ist eine Herleitung der bekannten Sprungrelationen für die zweiten Ableitungen der verschiedenen Potentiale.

*W. Feller* (Stockholm).

**Evans, Griffith C.:** Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions. Mh. Math. Phys. 43, 419—424 (1936).

Let  $F$  be a closed set with the exterior frontier  $s$ . The necessary and sufficient condition for the existence of a function  $u(M)$  harmonic exterior to  $s$  and interior to a Jordan curve containing  $F$  which satisfies

$$\lim_{M \rightarrow Q} u(M) = +\infty$$

for all  $Q$  in  $s$ , is that  $s$  be of zero capacity. Of course  $s$  and  $F$  are then identical. *Szegő*.

**Haag, J.:** Sur certains problèmes de la théorie des fonctions harmoniques. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 163—170 (1936).

La plus importante question traitée est la détermination d'une fonction  $P(x, y)$ ,



harmonique à l'intérieur d'un contour fermé qui ne rencontre pas  $Oy$ , et qui remplit sur ce contour la condition

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + tP = F,$$

où  $F$  est une fonction continue donnée et  $t$  est un paramètre; l'aut. montre que, quand une certaine équation de Fredholm a une solution unique, ce qui arrive quand  $|t|$  est assez petit, le problème admet des solutions qui dépendent de deux constantes arbitraires. L'aut. indique aussi des cas particuliers où la solution se simplifie. Les autres problèmes traités exigent des conditions de compatibilité; ils comportent deux ou trois conditions à la frontière, et, pour deux d'entre eux, il y a deux inconnues harmoniques conjuguées; des cas particuliers simples sont indiqués. *Georges Giraud.*

**Schubert, Hans:** Über einige Lichtensteinsche Hilfssätze der Potentialtheorie und ihre Anwendung auf die Hydrodynamik. Leipzig: Diss. 1935. 65 S.

Lichtenstein (Leipz. Ber. 1926) hat das Verhalten der ersten und zweiten Ableitungen eines Newtonschen Potentials vollständig festgestellt, dessen Belegungsdichte im ganzen Raum ausgebreitet ist und vor allem einer gewissen von Lichtenstein formulierten „Hölderschen“ Bedingung mit einem im Unendlichen verschwindenden Koeffizienten genügt. Die genau entsprechende Untersuchung liefert der Verf. im vorliegenden Auszug seiner ausführlicheren Leipziger Dissertation für das logarithmische Potential, bei dem, wie Ref. Math. Z. 37, 728 (1933) (dies. Zbl. 8, 69) bemerkt hat, als weitere Bedingung hinzukommen muß, daß die Gesamtmasse der Flächenbelegung endlich ist. Als Anwendung auf die Hydrodynamik ergibt sich (in zwei Fassungen) der fundamentale Existenz- und Unitätssatz für die stetige zweidimensionale (Wirbel-) Bewegung einer unbegrenzten inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit, der — für die räumliche Bewegung von Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, S. 416 bis 428, Berlin 1929, formuliert und bewiesen, für die ebene Bewegung ebendort S. 441 bis 443 nicht ganz ausreichend formuliert — vom Verf. auf teilweise anderem Wege und mit Ergänzungen hinsichtlich Existenz und Stetigkeit der beim Approximationsverfahren auftretenden Funktionen erbracht wird. Die potentialtheoretischen und (soweit möglich) hydrodynamischen Untersuchungen werden außerdem noch unter neuen Voraussetzungen durchgeführt, die vom Verschwinden der Belegungs- bzw. Wirbeldichte im Unendlichen weniger verlangen. *E. Hölder (Leipzig).*

**Pol, Balth. van der:** On potential and wave functions in  $n$  dimensions. Physica 3, 385—392 (1936).

L'auteur indique une méthode pour obtenir une solution de l'équation des ondes dans l'espace de  $n$  dimensions en partant d'une solution dans l'espace de  $n-1$  dimensions. Il donne ensuite des généralisations des solutions classiques de Whittaker pour l'équation de Laplace et l'équation des ondes. *Janczewski (Leningrad).*

**Pol, Balth. van der:** A generalization of Maxwell's definition of solid harmonics to waves in  $n$  dimensions. Physica 3, 393—397 (1936).

Partant de la fonction potentielle de Maxwell:  $u_n = r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$ , l'auteur construit pour l'espace de  $n$  dimensions et pour l'équation des ondes des solutions jouant un rôle analogue à  $u_n$ . *Janczewski (Leningrad).*

**Miranda, Carlo:** Analisi esistenziale per i problemi relativi alle equazioni dei fenomeni di propagazione. Mem. Accad. Ital. 7, 277—319 (1936).

Verf. studiert die partielle Integro-Differentialgleichung

$$u(x, t) = f(x, t) + \left( A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial}{\partial t} + A_0 \right) \int_C K(x, y) u(y, t) dy;$$

dabei sind  $x, y$  Punkte des  $r$ -dimensionalen Gebietes  $C$ ,  $t$  eine reelle, nichtnegative Veränderliche,  $A_0, A_1, A_2$  drei Konstanten,  $K(x, y)$  ein quadratsummierbarer, abgeschlossener, positiv definiter Kern. Die unbekannte Funktion  $u(x, t)$  soll außerdem eine Anfangs- und eine asymptotische Bedingung erfüllen, nämlich  $u(x, 0) = u^{(0)}(x)$ ,  $|u(x, t)| e^{-\alpha t} \leq$  einer von  $\alpha$  abhängigen, quadratsummierbaren Funktion von  $x$ , für

jedes  $\alpha > 0$ . Die Existenzfrage wird unter sehr allgemeinen und ganz natürlichen Regularitätsannahmen erschöpfend beantwortet. Zu diesem Zweck wird die Gesamtheit der Eigenwerte  $\lambda_n$  und der Eigenfunktionen  $\varphi_n$  von  $K$  herangezogen. Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung ist die Bemerkung, daß die Fourierschen Koordinaten  $u_n(t)$  der Funktion  $u(x, t)$  nach dem orthogonalen, normierten System der  $\varphi_n(x)$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten genügen sollen; die  $u_n(t)$  sollen außerdem einen gegebenen Anfangswert  $u_n^0$  haben und nicht schneller als  $e^{\alpha t}$  (für jedes  $\alpha > 0$ ) anwachsen. Aus der Untersuchung der Verträglichkeit solcher Bedingungen für die  $u_n(t)$  entspringen zunächst einige notwendige Bedingungen für die Existenz einer Lösung  $u(x, t)$  des obigen Problems, welche sich dann auch als hinreichend erweisen, indem man, falls sie befriedigt sind,  $u(x, t)$  durch eine Fourierreihe explizit ausdrücken kann. Die verschiedenen Verhältnisse, die statthaben können, sind in ihren Einzelheiten studiert; drei Fälle sind dabei zu unterscheiden: der elliptische ( $A_2 > 0$ ), der hyperbolische ( $A_2 < 0$ ) und der parabolische ( $A_2 = 0$ ) Fall. Verf. gibt auch in allen Fällen bemerkenswerte Kriterien, um die Stabilität in bezug auf  $t$  und die Existenz eines Asymptotenwertes  $u(x, \infty)$  der Lösung  $u(x, t)$  zu entscheiden. Endlich wird eine Anwendung auf gewisse Randwertprobleme für elliptische, hyperbolische, parabolische, partielle Differentialgleichungen gemacht, die sich unter Benutzung der Greenschen Funktion auf partielle Integro-Differentialgleichungen des obigen Typus zurückführen lassen. *G. Cimmino* (Napoli).

**Guigue, René:** Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique. Enseignement Math. 34, 347—358 (1936).

Verf. betrachtet Gleichungen der Form (1)  $z_{yy} + f(x, y)z_x = 0$  und behandelt im ersten Teil der Arbeit die Frage, wann eine solche Gleichung in eine solche gleicher Form übergeführt werden kann, in der aber  $f$  nur von  $x$  abhängt. (Gleichungen der letzteren Form lassen sich sofort in  $z_{yy} - z_x = 0$  überführen.) Insbesondere wird gezeigt, daß man alle Gleichungen der Form (1), die sich so reduzieren lassen, erhält, wenn man die Gleichung  $u_{yy} + u_x/u^2 = 0$  integrieren kann. Die Integration der letzteren Gleichung ist wiederum äquivalent mit der Integration der Wärmeleitungsgleichung. Im zweiten Teil behandelt Verf. die Frage, wann sich eine Gleichung (1) auf eine solche reduzieren läßt, in der  $f$  nur von  $y$  abhängt. *E. Rothe* (Breslau).

**Green, George:** Ring and disk sources. Philos. Mag., VII. s. 21, 922—934 (1936).

Die Arbeit schließt sich einer Reihe früherer Arbeiten des Verf. an [Philos. Mag. 18 (1934); dies. Zbl. 10, 66], in welchen er Probleme der Wärmeleitungsgleichung — sowie der Schwingungsgleichung — mit der Methode der Wellenzüge behandelt. Es werden untersucht periodische Quellen, die längs Kreislinien, auf Kugeln, Zylindern und Ebenen ausgebreitet sind; ferner Momentanquellen und „stetige“ Quellen.

*E. Rothe* (Breslau).

**Green, George:** On a fundamental problem in diffraction. Philos. Mag., VII. s. 21, 934—947 (1936).

Verf. behandelt in wärmetheoretischer Analogie das Beugungsproblem, das entsteht, wenn eine ebene Welle normal auf einen sonst undurchlässigen ebenen Schirm mit kleiner kreisförmiger Öffnung fällt, und zwar bei beliebiger Frequenz. Es handelt sich also um die Aufstellung und Untersuchung gewisser Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, deren Zeitabhängigkeit durch den Faktor  $e^{ikt}$  ausgedrückt ist und deren Normalableitung auf dem Schirm außerhalb der Öffnung verschwindet. Verf. behandelt zunächst die entsprechende Aufgabe, wenn keine Öffnung vorhanden ist, und sucht sodann die durch Öffnung hervorgerufene Störung durch Superposition passender „Temperaturquellen“ in Rechnung zu setzen. Bei der Rechnung werden Resultate und Methoden der vorstehend referierten Arbeit benutzt. *E. Rothe* (Breslau).

**Delsarte, Jean:** Sur un problème de diffraction. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1026 bis 1028 (1936).

Verf. behandelt das Anfangsproblem der Maxwell'schen Gleichungen in dem Falle,



daß Dielektrizität  $\varepsilon$  und Permeabilität  $\mu$  in den Halbräumen  $x > 0$  bzw.  $x < 0$  verschieden sind. Er reduziert dies Problem auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Ebene  $x = 0$ , die hyperbolisch bzw. elliptisch ist, je nachdem ob  $(\mu_1 - \mu_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) < 0$  bzw.  $> 0$  ist.

K. Friedrichs (Braunschweig).

**Leray, Jean:** Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues. Comment. math. helv. 8, 149—180 u. 250—263 (1935).

Die Arbeit behandelt (vgl. dies. Zbl. 10, 299 und 12, 39) Existenz und Eindeutigkeit der ebenen Potentialströmung gegen eine gegebene Widerstandskurve, die sich von zwei Stellen der Kurve ablöst und mit zwei „freien Grenzen“ ein Totwasser umschließt. Entweder sind die Ablösungsstellen als Endpunkte der Kurve vorgeschrieben (problème du sillage); oder jede Ablösungsstelle ist auf der Kurve frei gelassen, aber der Bedingung unterworfen, daß die Krümmung der freien Grenze endlich ist bzw. stromabwärts dreht, wenn die Stelle im Innern bzw. am Rande der Kurve liegt. Von der Widerstandskurve  $\mathfrak{C}$  wird vorausgesetzt, daß ihre Neigung gegen die Senkrechte zur Stromrichtung höchstens zwischen  $\pm \frac{\pi}{2}$  schwankt und daß sie eine Hölder-stetige Krümmung besitzt. — Die Aufgabe läßt sich nach Levi-Civita und Villat auf eine Funktionalgleichung  $l(s) = V(l(s))$  für eine Funktion  $l(s)$ ,  $0 \leq s \leq \pi$  zurückführen. Die Funktion  $l(s)$  wird als Hölder-stetig mit einem Exponenten  $\nu < 1$  angesetzt und durch

$$\|l(s)\| = \text{Max} |l(s)| + \sup_{|s-s'|^\nu} \frac{|l(s) - l(s')|}{|s - s'|^\nu}$$

normiert; sie gehört somit einem linearen normierten vollständigen Raume an. Es wird nun gezeigt: 1. die Transformation  $V(l)$  ist vollstetig; 2. auf Grund einer funktionentheoretischen Abschätzung, es gibt eine Konstante  $C$ , die nur von Schranken für Länge und Krümmung von  $\mathfrak{C}$  abhängt, so daß für jede eventuelle Lösung von  $l = V(l)$  die Ungleichung  $\|l\| \leq C$  gilt. — Nun kann die grundlegende Theorie von Leray und Schauder (vgl. dies. Zbl. 9, 73) angewandt werden: Der Stelle  $\Phi = 0$  ist für die Transformation  $\Phi = l - V(l)$  in bezug auf die Menge  $\|l\| \leq C'$  ( $C' > C$ ) ein Abbildungsgrad zugeordnet, der bei stetiger Änderung von  $V$  erhalten bleibt, vorausgesetzt daß dabei der Rand  $\|l\| = C'$  nicht erreicht wird. — In dieser Weise aber kann  $V$  in eine solche Transformation übergeführt werden, die von  $l$  nicht abhängt; nämlich indem man  $\mathfrak{C}$  geeignet in eine zur Stromrichtung senkrechte Strecke überführt. Für sie und also überhaupt ist der Abbildungsgrad  $+1$ . Somit existiert wenigstens eine Lösung von  $l = V(l)$ . — Um die Frage der Eindeutigkeit zu klären, wird die Variationsgleichung  $\delta l = W(\delta l; l)$  von  $l = V(l)$  untersucht. Hat sie nur die Lösung  $\delta l = 0$ , so ist die Lösung  $l$  von  $l = V(l)$  isoliert und besitzt einen Index  $\pm 1$ , der bei stetiger Variation von  $V$  und  $l$  erhalten bleibt. Hat jede Lösung von  $l = V(l)$  den Index  $+1$ , so gibt es, da die Summe der Indizes der Abbildungsgrad ist, nur eine Lösung  $l$ . — Nach Weinstein ist  $\delta l = 0$  damit gleichwertig, daß eine gewisse homogene Randwertaufgabe nur die Lösung Null besitzt. Durch Ausbau einer Schlußweise des Ref. wird gezeigt, daß das unter einer einfachen Hypothese der Fall ist. Es gelingt dann auch, die Lösung  $l$  in eine andere stetig überzuführen, die offenbar den Index  $+1$  hat. Die Hypothese trifft zu beim problème du sillage; 1. wenn die Kurve  $\mathfrak{C}$  konvex ist, 2. wenn  $\mathfrak{C}$  samt Strömung symmetrisch ist; beim problème de la proue unter schärferen Einschränkungen, jedenfalls für einen konvexen Kreisbogen. In all diesen Fällen also ist die Lösung des Problems eindeutig.

K. Friedrichs (Braunschweig).

**Weinstein, Alexandre:** Sur l'équation des vibrations d'une plaque encastrée. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1899—1901 (1936).

$\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots$  seien die Eigenwerte der durch die Gleichung  $\Delta \Delta w - \lambda^2 w = 0$  und die Bedingung, daß  $w$  und seine Normalableitung am Rande des zugrunde gelegten Bereiches  $S$  verschwinden, gegebenen Randwertaufgabe (Problem I).  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$  seien die Eigenwerte der durch die Gleichung  $\Delta u + \omega u = 0$  und die Bedingung  $u = 0$

am Rande von  $S$  gegebenen Randwertaufgabe (Problem II). R. Courant hat alsdann [Math. Z. 15 (1922)]  $\lambda_n \geq \omega_n$  bewiesen. Zur schärferen Abschätzung führt Verf. nun ein gewisses Maximum-Minimum-Problem ein (Problem III), dessen Minima  $\varrho_1^2, \varrho_2^2, \dots$  seien. Läßt man eine gewisse im Problem III gestellte Nebenbedingung fort, so gilt  $\varrho_n = \omega_n$ , fügt man dagegen die Bedingung: Normalableitung gleich 0 am Rande von  $S$  hinzu, so gilt  $\varrho_n = \lambda_n$ , so daß  $\omega_n \leq \varrho_n \leq \lambda_n$  folgt. Als Anwendung gibt Verf. numerische obere und untere Schranken für die ersten vier Eigenwerte des Problems I an, wenn  $S$  ein Quadrat ist. — Verf. beabsichtigt, in einer späteren Arbeit auf die Beweise und Ausdehnung seiner Resultate zurückzukommen. *E. Rothe.*

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Sartori, R.: Recenti estensioni delle applicazioni del calcolo operatorio funzionale. Rend. Semin. mat. fis. Milano 9, 33—58 (1935).

Der Verf. zeigt, wie es möglich ist, die Fouriersche Integraldarstellung auf die Funktionen, welche impulsive Elemente enthalten, auszudehnen. Daraus folgt die Möglichkeit, indirekt die Lösungen der physikalischen Probleme durch Laplacesche und Fouriersche Transformationen zu charakterisieren. — Man betrachte ein System von partiellen linearen Differentialgleichungen mit einer einzigen bekannten Funktion  $f(t)$  und mehreren unbekannten Funktionen, von welchen  $\varphi(t)$  eine beliebige ist. Durch diese Gleichungen entsteht eine funktionelle Abhängigkeit zwischen  $f(t)$  und  $\varphi(t)$ . Es sei  $G(t)$  die Funktion, in welche  $\varphi(t)$  übergeht, wenn  $f(t)$  ein Impuls  $Fu(t)$  ist. Es kann diese als „erzeugende Funktion“ der genannten Abhängigkeit bezeichnet werden. Indem man  $G(t) = 0$  für  $t < 0$  annimmt, kann man mit der Heavisideschen Operatorenmethode eine Funktion  $F(\omega)$  bestimmen, welche durch die Integralgleichung

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\omega \vartheta} G(\vartheta) d\vartheta$$

mit  $G(t)$  verbunden ist. Daraus folgt

$$G(t) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\omega t + a^2 \omega^2 / 4\pi} F(\omega) d\omega & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

wo  $c$  eine reelle Konstante größer als der größte reelle Teil der singulären Punkte in endlicher Distanz der Funktion  $F(\omega)$  ist. — Der Verf. beweist, daß die Kenntnis der erzeugenden Funktion in jedem Fall die Bestimmung der  $\varphi(t)$  erlaubt. Wenn man mit  $\Delta$  die Operation  $\frac{\partial}{\partial t}$  bezeichnet und  $\Delta$  wie eine gewöhnliche Variable ansieht, so kommt man zu

$$G(t) = F(\Delta) Fu(t),$$

wo man  $F(\Delta)$  aus  $F(\omega)$  erhält, indem man  $\Delta$  an Stelle von  $\omega$  setzt. Man kann  $F(\omega)$  als charakteristische Funktion des Operators  $F(\Delta)$  bezeichnen. — Der Verf. betrachtet endlich die Funktion  $A(t)$ , welche man erhält, indem man auf die Heavisidesche Einheitsfunktion den Operator  $F(\Delta)$  anwendet und für welche er die Bezeichnung „funzione generatrice unitaria“ vorschlägt. Sie ist mit der „funzione generatrice impulsiva“  $G(t)$  durch folgende Gleichung verbunden:

$$A(t) = \int_0^t G(\vartheta) d\vartheta.$$

Es folgen einige Anwendungen — jedoch auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen — des allgemeinen Verfahrens, die charakteristischen Funktionen zu bestimmen, indem man die gegebenen Beziehungen zwischen den Funktionen von  $t$  durch diejenigen ersetzt, welche zwischen den „funzioni associate“ von  $\omega$  bestehen. *G. Lampariello.*



**Michal, A.-D., et E.-W. Paxson:** La différentielle dans les espaces linéaires abstraits avec une topologie. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1741—1743 (1936).

Verff. betrachten einen abstrakten linearen Raum  $L$ , der in einer etwas mehr einschränkenden Weise topologisiert wird, wie es vor kurzem J. v. Neumann getan hat. Sie verallgemeinern nur für  $L$  den Begriff des Frechetschen und Gateauxschen Differentials und zeigen, daß die Existenz des ersten die Existenz des zweiten nach sich zieht und daß dann beide gleich sind (woraus die Eindeutigkeit dieser Differentiale folgt). Eine Funktionaloperation, deren Differential in einer konvexen Menge  $H$  aus  $L$  überall verschwindet, ist in  $H$  konstant. Aus Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit.

*Schauder (Lwów).*

**Cohen, L. W.:** Transformations of spaces of infinitely many dimensions. Ann. of Math., II. s. **37**, 326—335 (1936).

The author considers three spaces in infinitely many dimensions:  $H_p$  ( $p \geq 1$ ) with  $\sum_n |x_n|^p < \infty$  and  $\|\xi\|^p = \sum_n |x_n|^p$ ;  $H$ , the set of all bounded sequences with  $\|\xi\| = LU B_n |x_n|$ ; and the subspace  $H_0$  of  $H$  of sequences having zero as limit. He proves the well known sufficient condition that a subset  $S$  of  $H_p$  be compact, viz. that  $S$  be bounded and  $\sum_N |x_n|^p \rightarrow 0$  uniformly for elements of  $S$ , a similar result holding in  $H$  and  $H_0$ . This is utilized to demonstrate that if the matrix  $a_{ij}$  satisfies the condition  $\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^{p'} \right]^{p/p'} < \infty$  ( $p'$  the conjugate of  $p$ ,  $p > 1$ ), then  $\sum_j a_{ij} x_j$  is a completely continuous transformation on  $H_p$  to  $H_p$ . If there exists a sequence  $\sigma_i$  such that  $\sum \sigma_i < \infty$  and  $|a_{ik}| \leq \sigma_i$  for all  $k$  then  $\sum_k a_{ik} x_k$  is a completely continuous transformation on  $H_1$  to  $H_1$  while  $\sum_i x_i a_{ik}$  has the same property on  $H$  to  $H_0$  (the latter even under weaker conditions on  $a_{ik}$ ). In this case it is possible to apply the v. Koch method of infinite determinants to the solution of the infinite system  $x_i + \sum_k a_{ik} x_k = y_i$ , in the space  $H_1$ , the conjugate system  $x'_k + \sum_i x'_i a_{ik} = y'_k$  being in  $H$  as one might hope from the conjugacy of  $H_1$  and  $H$ , thus generalizing and completing v. Koch's results on infinite normal determinants.

*Hildebrandt (Ann Arbor).*

### **Variationsrechnung:**

**Hestenes, Magnus R.:** The problem of Bolza in the calculus of variations in parametric form. Amer. J. Math. **58**, 391—406 (1936).

The results previously obtained by the author [Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934); this Zbl. **10**, 306] for the non-parametric form of the problem of Bolza are here extended to the parametric form. Singularity of an extremal is defined in terms of the vanishing of a new  $F_1$  function which is an absolute invariant under change of coordinates. The principal difficulty in discussing the second variation is that the accessory problem is necessarily singular. This difficulty is obviated by introducing a "normal form" of the accessory problem which is equivalent to the usual form but is non-singular whenever the original extremal is non-singular. It is then shown that the second variation of the integral is positive (non-negative) if and only if all the characteristic roots of the accessory boundary-value problem are positive (non-negative). Sufficiency conditions are then obtained by carrying over methods and results of the non-parametric problem. As in the non-parametric case, these conditions make no requirement of normality.

*E. J. McShane (Virginia.)*

**Neumann, Ernst Richard:** Die Brennpunktsbedingungen der Variationsrechnung in der Weierstraßschen Parameterdarstellung. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **46**, Abt. 1, 32—38 (1936).

The author discusses the variation problem in the plane with two variable end

points, and obtains a condition on the focal points exactly similar to the one he previously obtained for the non-parametric problem (see this Zbl. 11, 27). In the present paper the computation is simplified. *Graves* (Chicago).

**Maneill, J. D.: A proof of the corner conditions in the calculus of variations.** Amer. Math. Monthly 43, 68—70 (1936).

The simple proof given here of the usual corner conditions on a minimizing arc is independent of the vanishing of the first variation, and hence is applicable to minimizing curves lying partially or entirely along the boundary of the region  $R$  of admissible curves, provided the two arcs meeting at the corner in question are intersected by the curves of non-singular families lying in the region  $R$ . *Graves* (Chicago).

**Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie. XI. Zur Variationsrechnung.** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 359—366 (1936).

Es sei ein Variationsproblem  $J = \int F(x_1, x_2; x'_1, x'_2) dt$  vorgelegt, und man führe für die Linienelemente kanonische Koordinaten  $x_i$  und  $p_i = \frac{\partial F}{\partial x'_i}$  ein. Ist dann  $x_i = x_i(a_1, a_2)$ ,  $p_i = p_i(a_1, a_2)$  eine zweiparametrische Schar von Linienelementen, so ist nach Poincaré das Integral

$$\int g = \iint \left\{ \frac{\partial(x_1, p_1)}{\partial(a_1, a_2)} + \frac{\partial(x_2, p_2)}{\partial(a_1, a_2)} \right\} da_1 da_2,$$

erstreckt über ein beliebiges Gebiet der  $a_1, a_2$ -Ebene, eine Integralinvariante, d. h. es bleibt bei Verschiebungen der Elemente  $x_i(a_1, a_2)$ ,  $p_i(a_1, a_2)$  auf den durch sie bestimmten Extremalen ungeändert, hängt also nur von diesen Extremalen ab. Dies gestattet, den Integranden  $g$  dieses Doppelintegrals als Extremalendichte und das Integral selbst als Maß der Extremalenmenge aufzufassen. Diese Interpretation wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt, der einen Satz von Crofton für den euklidischen Fall auf Finslersche Räume verallgemeinert: Ist das Variationsproblem  $J$  symmetrisch, so ist die Finslersche Länge  $J$  einer Kurve  $\mathfrak{K}$  gleich  $\int n g$ , wo  $n$  die Anzahl der Schnittpunkte von  $\mathfrak{K}$  mit der variablen Extremalen  $g$  ist. — Es erweist sich ferner als sinnvoll, eine Dichte für die Linienelemente selbst einzuführen. Das Maß der Menge aller Linienelemente, deren Punkte einem gegebenen Bereich angehören, ist gleich dem Flächenintegral über den Inhalt der Figuratrix und kann als Ersatz des Flächeninhalts in der Finslerschen Geometrie betrachtet werden. — Analoge Sätze gelten für Finslersche Räume beliebiger Dimension. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie. XII. Über vollkommene optische Instrumente.** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 409—412 (1936).

Der auf Maxwell, Bruns und Klein zurückgehende Satz, nach welchem ein vollkommenes optisches Instrument notwendig eine „optisch längentreue“ Abbildung liefert, wird sehr einfach bestätigt, und zwar in der allgemeinen Fassung, in der er erstmalig von Carathéodory (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1926, 1—18) bewiesen wurde, also für beliebige (inhomogene und anisotrope) Medien, deren Brechungsindex eine symmetrische und analytische Funktion der Strahlrichtung ist. Der Beweis des Verf. beruht wesentlich auf der Invarianz der in der vorstehend ref. Arbeit eingeführten Extremalendichte bei Spiegelung und Brechung. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

### **Funktionentheorie:**

**Rios, S.: Ergänzung zum Aufsatz „Heutiger Stand der Theorie der Überkonvergenz“.** An. Asoc. españ. Progr. Ci. 3, 264—266 (1936) [Spanisch].

Vgl. dies. Zbl. 12, 212.

**Radojčić, Miloš: Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle.** Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 185—200 (1935).

Allgemeine Betrachtungen über die Form der Fundamentalbereiche der analytischen Funktionen in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes oder Linie, wo sie meromorph sind. *Myrberg* (Helsinki).



**Lee, Kwok Ping:** On the unified theory of meromorphic functions. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 182—187 (1936).

L'auteur résume, sans donner de démonstrations, ses nouvelles recherches sur les cercles de remplissage et les directions de Borel des fonctions méromorphes, son but principal étant d'étendre aux fonctions d'ordre infini les résultats de Rauch concernant surtout les fonctions d'ordre fini (voir ce Zbl. 8, 214). Il énonce donc un théorème relatif à la distribution des zéros des fonctions  $f(z) - \Pi(z)$  appartenant à un petit angle en supposant  $f(z)$  donnée et la fonction caractéristique  $T(r)$  de  $\Pi(z)$  assujétie à certaines limitations; il emploie dans cet énoncé la notion d'ordre de Hiong (voir ce Zbl. 12, 264). Il introduit d'autre part de nouvelles fonctions de comparaison qui sont toujours à croissance normale au sens de Borel; dans le cas de l'ordre infini l'approximation obtenue reste la même que lorsqu'on emploie la méthode de Hiong; mais dans le cas de l'ordre fini il y a un gain, sans qu'on atteigne évidemment la précision que fournissent les méthodes spéciales aux fonctions de cet ordre. *G. Valiron.*

**Robertson, M. S.:** Analytic functions star-like in one direction. Amer. J. Math. 58, 465—472 (1936).

Eine für  $|z| < 1$  reguläre Funktion  $f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n$  heißt sternförmig in Richtung der reellen Achse (Klasse  $S$ ), wenn die Bilder der Kreise  $|z| = r$  für genügend große  $r < 1$  [bei der Abbildung durch  $f(z)$ ] von der reellen Achse in genau 2 Punkten getroffen werden. Die Klasse  $S$  enthält als Spezialfall die typisch reellen  $f(z)$  und läßt sich, ähnlich wie diese, auf die Klasse der im Einheitskreise regulären Funktionen positiven Realteils zurückführen. Damit beherrscht man sie vollständig. Insbesondere gewinnt Verf. so die scharfe Abschätzung  $|a_n| \leq n^2$ , in welcher das Gleichheitszeichen genau für  $f(z) = \frac{z + \varepsilon z^2}{(1 - \varepsilon z)^3}$ ,  $\varepsilon = \pm i$ , richtig ist. — Eine interessante Anwendung ist folgende: Die für  $|z| < 1$  schlichte Funktion  $g(z) = z + \sum_2^{\infty} c_n z^n$  heißt konvex in Richtung der imaginären Achse (Klasse  $\mathfrak{F}$ ), wenn die Bilder der Kreise  $|z| = r$  für genügend große  $r < 1$  (bei der Abbildung durch  $g(z)$ ) von den Parallelen zur imaginären Achse in höchstens zwei Punkten getroffen werden.  $g(z)$  gehört nun dann und nur dann zu  $\mathfrak{F}$ , wenn  $z g'(z)$  zu  $S$  gehört. Hieraus folgt zunächst, daß die bekannte Bieberbachsche Vermutung  $|c_n| \leq n$  für die Unterklasse  $\mathfrak{F}$  der schlichten  $g(z)$  zutrifft. Für die  $g(z)$  aus  $\mathfrak{F}$  mit reellen Koeffizienten gilt sogar  $|c_n| \leq 1$ , und das gleiche ist für die ungeraden  $g(z)$  aus  $\mathfrak{F}$  richtig. *Rogosinski* (Königsberg).

**Ostrowski, Alexandre:** Sur la conservation des angles dans la transformation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 726—727 (1936).

Der Bereich  $\Gamma$  der  $\zeta$ -Ebene sei einfach zusammenhängend und sein Rand habe einen erreichbaren Punkt  $\pi_0$  im Unendlichen. Durch  $\zeta = f(z)$  werde  $\Gamma$  auf die Halbebene  $H: \Re z > 0$  derart abgebildet, daß  $z = \infty$  Bild von  $\pi_0$  ist. Es sei ferner  $L$  in ein  $H$  verlaufender, in  $z = \infty$  einmündender Jordanbogen, auf dem  $\arg z$  gegen einen Wert  $\varphi \left( -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$  konvergiert. Der Verf. nennt die Abbildung auf  $L$  konform, wenn das Bild  $\Lambda$  von  $L$  eine in  $\pi_0$  ebenfalls mit einem Grenzwinkel  $\psi$  einmündende Kurve darstellt. Man zeigt leicht, daß bei Ersetzung von  $L$  durch eine Kurve mit demselben Grenzwinkel  $\varphi$  die Konformität erhalten bleibt. Die Arbeit ist nun die Voranzeige folgender 4 Sätze: I. Man betrachte die Gesamtheit aller Kurven  $L$  in  $H$ , die in  $r = \infty$  mit einem Grenzwinkel  $\varphi \left( -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$  einmünden.

Wenn die Abbildung  $\varphi = f(r)$  auf 2 der Kurven konform ist, die mit verschiedenen Grenzwinkeln einmünden, so auf allen. Der Zusammenhang zwischen  $\psi$  und  $\varphi$  wird durch eine lineare Funktion  $\psi = a\varphi + b$  ( $a \geq 0$ ) gegeben. Ist  $\alpha = 1$ , so heiße die Abbildung in  $\pi_0$  konform. — II. Notwendig für die Kon-

formität der Abbildung in  $\pi_0$  ist die Existenz eines Winkels  $\psi_0$  derart, daß  $\Gamma$  Winkelräume enthält, deren Symmetrieachse die Richtung  $\psi_0$  hat und deren Öffnungswinkel beliebig wenig unter  $\pi$  liegen, dagegen keinen Winkelraum mit derselben Achsenrichtung umfaßt, dessen Öffnungswinkel größer als  $\pi$  wäre. — III. Man erhält notwendige und hinreichende Bedingungen, wenn man der in II enthaltenen Bedingung die Existenz von zwei nach  $\zeta = \infty$  konvergierenden Punktfolgen  $\zeta_r, \zeta'_r$  auf dem Rand von  $\Gamma$  fordert, für die

$$\arg \zeta_r \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\zeta_r}{\zeta_{r+1}} \rightarrow 1; \quad \arg \zeta'_r \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\zeta'_r}{\zeta'_{r+1}} \rightarrow 1$$

ist. — IV. Der einfachzusammenhängende Bereich  $\Gamma$  der  $\zeta$ -Ebene enthalte  $\zeta = \alpha$  auf dem Rande, den Punkt  $\zeta = \omega$  ( $|\omega| > 1$ ) im Innern. Bei einer konformen Abbildung von  $\Gamma$  auf  $|z| < 1$ , bei der  $\omega$  in  $z = 0$  übergeführt wird, wird die Gesamtheit der in  $|\zeta| \leq 1$  gelegenen Randpunkte von  $\Gamma$  auf eine meßbare Punktmenge auf  $|z| = 1$  übergeführt, deren Maß  $c \leq 4 \arcsin \frac{2\sqrt{|\omega|}}{1+|\omega|}$  ist. — Der mit dem Milloux'schen eng verwandte Satz IV ist das wesentliche Hilfsmittel für den Bereich der vorangehenden Sätze.  
K. Löwner (Prag).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

Cramér, Harald: Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Z. 41, 405—414 (1936).

Vollständiger Beweis (mit charakteristischen Funktionen) des in dies. Zbl. 13, 214 angekündigten Satzes, daß die Relation  $\int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x-y) dV_2(y) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

mit zwei Verteilungsfunktionen  $V_r(x)$  nur dann besteht, wenn  $V_r(x) = \Phi\left(\frac{x-m_r}{c_r}\right)$ , mit  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ,  $m_1 + m_2 = 0$ . Insbesondere wird das mehrdimensionale Analogon dieses Satzes behandelt.  
W. Feller (Stockholm).

Kozakiewicz, W.: Sur les fonctions caractéristiques et leur application aux théorèmes limites du calcul des probabilités. Ann. Soc. Polon. math. 13, 24—43 (1935).

Seien  $x_n, y_n, \bar{x}_n, \bar{y}_n$  stochastische Veränderliche,  $F_n(\xi, \eta)$  und  $\bar{F}_n(\xi, \eta)$  die Verteilungsfunktionen von  $(x_n, y_n)$  bzw. von  $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ ,  $\varphi_n(\sigma, \tau)$  und  $\bar{\varphi}_n(\sigma, \tau)$  die zugehörigen charakteristischen Funktionen. In Verallgemeinerung des bekannten Satzes von P. Lévy im Falle einer Veränderlichen wird unter gewissen Bedingungen aus  $\lim\{\varphi_n - \bar{\varphi}_n\} = 0$  auf  $\lim\{F_n - \bar{F}_n\} = 0$  geschlossen. Ähnliches für Folgen  $f_n(x_n, y_n)$ , wobei  $f_n(u, v)$  eine reelle Funktion ist. — Weiter gibt Verf. eine Verallgemeinerung des S. Bernsteinschen Satzes [Math. Ann. 97 (1926)] über die Konvergenz von  $F_n(\xi, \eta)$  gegen eine Gaußsche Verteilung, die sich von der Formulierung von Romanowskij (Bull. Acad. Sci. URSS 1929) dadurch unterscheidet, daß die Bedingung  $\lim R_n^2 = R^2 < 1$  wegfällt, wobei  $R_n$  der Korrelationskoeffizient von  $x_n$  und  $y_n$  ist ( $x_i$  ist für  $i \neq k$  unabhängig von  $x_k, y_k$ ).  
W. Feller (Stockholm).

Doebelin, W., et Paul Lévy: Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 2027—2029 (1936).

Die Dispersion einer stochastischen Veränderlichen  $X$  für die Wahrscheinlichkeit (W.)  $\alpha$  ist die Minimallänge eines Intervalls, das  $X$  mit einer W.  $\geq \alpha$  enthält. Es wird bewiesen: Ist  $X_n$  eine Folge von stochastischen Veränderlichen, deren Dispersionen für eine feste W.  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) sämtlich  $\geq 2l$  sind, so gibt es Konstanten  $K$  und  $N$  derart, daß für  $n > N$  die Dispersion von  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  für die W.  $\beta > 0$  mindestens gleich  $Kl\sqrt{n}$  wird.  
W. Feller (Stockholm).

Brelot, M.: Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 113—131 (1936).

Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unabhängige zufällige Größen und  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die ent-



sprechenden mathematischen Erwartungen. Verf. untersucht die Größe

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \frac{\sum x_i}{n})^2}{n}} - \sqrt{\frac{\sum (a_i - \frac{\sum a_i}{n})^2}{n}}.$$

Im Falle Gaußscher Verteilungen der Größen  $x_i$  erhält Verf. gewisse Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung  $|\Delta| > \lambda$ . *A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Jackson, Robert W. B.:** Tests of statistical hypotheses in the case when the set of alternatives is discontinuous, illustrated on some genetical problems. *Statist. Res. Mem.*, Univ. London 1, 138—161 (1936).

**Münzner, H.:** Grundbegriffe und Probleme der Korrelationsrechnung. *Deutsche Math.* 1, 290—307 (1936).

**Mittmann, Otfried:** Ausmerze und Gattenwahl im Falle eines einpaarigen Erbgangs. *Deutsche Math.* 1, 323—333 (1936).

● **Martinotti, Pietro:** *Matematica applicata alle scienze sociali*. *Tl. 1 u. 2*. Mailand: Antonio Giuffrè 1936. *Tl. 1:* XII, 313 S. u. 6 Taf. *Tl. 2:* XII, 335 S.

Eine elementare Einführung in diejenigen Teile der Mathematik, die in den Sozialwissenschaften Anwendung gefunden haben, und in diese Anwendungen selbst, die jeweils im Anschluß an die betreffenden mathematischen Abschnitte gebracht werden. Behandelt werden die Elemente der folgenden Gebiete: Elementare Funktionen und ihre graphische Darstellung. Finanzmathematik. Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Statistik. Versicherungsmathematik. Lineare und algebraische Gleichungen. Komplexe Zahlen. Analytische Geometrie. Vektoren. Infinitesimalrechnung. Mathematische Nationalökonomie, insbesondere Theorie des wirtschaftlichen Gleichgewichts. — Zu bedauern ist, daß Differentiale als unendlich kleine Größen der verschwommensten Art eingeführt werden, obwohl sonst, insbesondere beim Grenzwertbegriff, eine korrekte Behandlung angestrebt ist. *Fenichel*.

**Misra, D. P.:** The removal of the assumptions from the mathematical theory of finance. *Tôhoku Math. J.* 42, 176—178 (1936).

**Benser, Hubert:** Über die Verwertbarkeit mathematischer Wachstumsgesetze in der Bevölkerungstheorie. Göttingen: Diss. 1935. 52 S. u. 9 Fig.

Zunächst wird für das Wachstum einer Bevölkerung eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung angegeben, wobei die Begründung überaus apriorisch und der einzig vorkommende mathematische Schluß falsch ist. Zum Vergleich der Güte der einzelnen Interpolationsverfahren wird die preußische Bevölkerung 1816—1910 ausgeglichen durch verschiedene Parabeln und durch eine logistische Kurve. Hierbei wird aber nicht Approximation im Mittel angewandt, sondern Interpolation durch drei willkürlich gewählte Punkte. *W. Feller* (Stockholm).

**Wunderlin, W.:** Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Unfallversicherung. *Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math.* H. 31, 1—27 (1936).

**Schweer, Wilhelm:** Über graphische Methoden in der Versicherungsmathematik. *Arch. math. Wirtsch. u. Sozialforsch.* 2, 98—112 (1936).

Eine Zusammenstellung nützlicher und vom heutigen Versicherungswesen noch zu wenig beachteter zeichnerischer Darstellungen nebst Hinweis auf ihre Genauigkeit: Darstellung von Sterbenswahrscheinlichkeiten, Versicherung anormaler Risiken, das Gompertz-Makehamsche Gesetz der Sterbeintensität u. a. *Rehbock* (Bonn).

**Jockel, Rudolf:** Untersuchung über den Einfluß von Fremdgeld beim Bausparen. *Arch. math. Wirtsch. u. Sozialforsch.* 2, 113—134 (1936).

Unter Verwendung der kontinuierlichen Methode wird eine offene Bausparkasse, deren Zuteilungen nach der Priorität erfolgen, untersucht, hierbei wird die Annahme gleichmäßigen Zuganges gemacht. Legt man einen harmonischen Tarif zugrunde, so findet man zwischen Sparzinsfuß ( $j$ ), Sparrate ( $s$ ), Tilgungsrate ( $t$ ) die Beziehung:  $t = s + j$ . Den Ausdruck für  $Z(x)$ , Summe der vom Beginn der Kassentätigkeit bis

zum Zeitpunkt  $x$  insgesamt zugeteilten Bausparsummen, findet man aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung. Die Wartezeit  $w$  ist bei Beachtung der Zahl der zur Zeit  $x$  abgeschlossenen Bausparverträge  $\alpha x$  leicht zu ermitteln. Nimmt die Bausparkasse einen einmaligen, befristeten Kredit und bringt ihn an die Sparer zur Verteilung, so werden die Wartezeiten nur eines Teiles der Sparer verkürzt, während ein unkündbares Darlehen an die Bausparkasse und dessen Verteilung an die Sparer für alle Sparer eine Verkürzung der Wartezeit nach sich zieht und im Vergleich zu der Kreditbeschaffung auf dem freien Markte eine Verbilligung bedeutet. Aufnahme von Fremdgeld, proportional den jeweiligen Sparbeiträgen, ermöglicht eine Verkürzung der Wartezeiten; wird Fremdgeld proportional den Neuzuteilungen herangezogen, so läßt graphische Lösung erkennen, daß sich die Wartezeiten oszillatorisch einem festen Wert nähern. Bei der Annahme des nichtharmonischen Tarifs, daß der Sparer nach der Zuteilung einen festen Tilgungsbetrag  $\tau$  zahlt ( $t = s + j + \tau$ ), ergibt sich der Zusammenhang:  $(t - s - j) e^{-jw} + s = t e^{-ju}$  ( $u$  Zugehörigkeitsdauer). Ein graphisches Verfahren läßt erkennen, daß in diesem Falle bei Heranziehung von Fremdgeld, proportional den Sparbeträgen, eine noch stärkere Verkürzung der Wartezeit eintritt als im Falle harmonischen Tarifs. Der Vergleich der bisherigen Annahmen über Fremdgeldverwendung mit dem „System Treubau“ (Tilgung eines nach Zuteilung auf Grund eines 1. Bausparvertrages gegebenen zusätzlichen Fremdgelddarlehens durch einen 2. Bausparvertrag) zeigt, daß das „System Treubau“ bei geringer Kostensteigerung eine bemerkenswerte Wartezeitverkürzung bewirkt. Schließlich wird die Höhe eines Ausgleichsfonds ermittelt, der bei schwankendem Zugang eine gleichbleibende Wartezeit sichern soll.

F. Knoll (Wien).

● Stumpff, K.: Über die Zufallswahrscheinlichkeit von Periodizitäten in Beobachtungsreihen. Grundlagen einer allgemeinen Expektanztheorie. (Veröff. d. Meteorol. Inst. d. Univ. Berlin. Hrsg. v. H. Ertel u. H. v. Ficker. Bd. 1, H. 2.) Berlin: Dietrich Reimer, Andrews & Steiner 1936. 54 S. u. 6 Fig. RM. 3.50.

Gegeben  $n$  Beobachtungswerte  $y_r$ , in gleichen Zeitabständen  $2\pi/n$  gewonnen, Gesamtlänge der Beobachtungszeit gleich  $2\pi$  gesetzt. Mittlere Abweichung (Streuung) der  $y_r$  sei  $\mu$ , ihre Häufigkeitsverteilung sei durch die Funktion  $\Phi$  gegeben. Als Expektanz wird hier der Erwartungswert der Amplituden der Sinuswellen bezeichnet, die sich bei harmonischer Analyse der Beobachtungsreihe ergeben; die Expektanz kann entweder als  $E_1$  (mittlerer absoluter Wert der Amplituden) oder als  $E_2$  (Wurzel aus dem mittleren Amplitudenquadrat) definiert werden. Die Realität von Perioden wird seit Schuster abgeschätzt am Verhältnis der wirklich gefundenen Amplitude zur Expektanz. Schuster beschränkte sich auf den Fall statistischer Unabhängigkeit und Gaußscher Verteilung der  $y_r$  und fand  $E_2^2 = 4\mu^2/n$ , unabhängig von der Periodenlänge  $2\pi/r$ , und das Zufallskriterium  $w = e^{-s^2}$  für die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß eine Amplitude zufällig größer als  $sE_2$  wird. Für den praktisch häufigeren Fall der statistischen Abhängigkeit der  $y_r$  wird hier vorausgesetzt, daß aufeinanderfolgende  $y_r$  in linearer Regression stehen und daß alle vorkommenden Verteilungsfunktionen die Gestalt des Gaußschen Fehlergesetzes haben.  $E_2$  läßt sich dann durch die Autokorrelationskoeffizienten  $k_\sigma$  (zwischen der Reihe  $y_r$  und der verschobenen Reihe  $y_{r+\sigma}$ ) ausdrücken. Für die Sinuswelle der Periodenlänge  $2\pi/r$  wird näherungsweise

$$E_2^2 = \frac{4\mu^2}{n} \left[ 1 + 2 \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{\sigma}{n} \right) k_\sigma \cos(2\pi\sigma r/n) \right];$$

die genaue Gestalt dieser Grundformel ist später, ohne Beschränkung auf die genannten Voraussetzungen, vom Ref. abgeleitet (vgl. dies. Zbl. 13, 141). Die Abhängigkeit  $E_2(r)$  wird an Potsdamer Luftdruckbeobachtungen auch numerisch abgeleitet. — Ausführlich wird noch untersucht, wie  $E_2$  und  $w$  von der Gestalt von  $\Phi$  abhängen. Nur  $E_2$  erweist sich als unabhängig von den höheren statistischen Momenten von  $\Phi$ , während  $E_1$  und  $w$  nicht bloß von  $\mu$ , sondern auch von der Form von  $\Phi$  abhängen.

J. Bartels.



## Geometrie.

**Menger, K.: Algebra der Geometrie. (Zur Axiomatik der projektiven Verknüpfungsbeziehungen.)** Erg. math. Kolloqu. H. 7, 11—12 (1936).

Vgl. für diese und die nachstehende Arbeit dies. Zbl. 14, 76. Eine Klasse von Symbolen wird zwei assoziativen Verknüpfungen unterworfen, die beide ein indifferentes Element besitzen, teilweise umkehrbar sind, zwei abgeschwächten Distributivgesetzen und dem Endlichkeitsgesetz für Teilerketten genügen. Einige Hauptresultate aus diesen Voraussetzungen werden angegeben und die Begriffe Punkt, Ebene, lineare Abhängigkeit eingeführt. Bei geeigneter Definition der Dimension ist aus den genannten Voraussetzungen die Funktionalgleichung der Dimension beweisbar. (Ohne Beweise.)  
*R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Alt, F.: Axiomatik der affinen Verknüpfungsbeziehungen.** Erg. math. Kolloqu. H. 7, 12 (1936).

Ein spezieller in obiger Arbeit zit. Satz, der sog. Einschiebungssatz von Bergmann, wird näher analysiert und im Zusammenhang damit die Herleitung der Funktionalgleichung der Dimension aus zwei simultanen Funktionalungleichungen in einen projektiven und affinen Teil gespalten. (Ohne Beweise.)  
*R. Moufang*.

**Blumenthal, Leonard M.: Remarks concerning the euclidean four-point property.** Erg. math. Kolloqu. H. 7, 8—10 (1936).

**Ville, A.: Sur une proposition de M. L. M. Blumenthal.** Erg. math. Kolloqu. H. 7, 10—11 (1936).

$\sigma(x)$  sei für  $x \geq 0$  definiert und konkav,  $\sigma(0) = 0$ . Ist  $M$  ein metrischer Raum mit der Entfernungsfunktion  $pq$  und führt man statt  $pq$  als Entfernung die Zahl  $\sigma(pq)$  ein, so ist der neue Raum auch metrisch. Wenn für  $\sigma(x)$  speziell die Funktion  $\sigma(x) = x^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$  genommen wird, hat der neue Raum stets die 4-Punkt-Eigenschaft. In der anschließenden Note von Ville wird ein aus 5 Punkten bestehender metrischer Raum angegeben, der wie oben mit  $\sigma(x) = x^{\frac{1}{2}}$  ummetrisiert keinem Euklidischen Punktquintupel kongruent ist.  
*H. Busemann* (Kopenhagen).

**Blumenthal, Leonard M.: The metric characterization of a class of spaces.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 225—227 (1936).

Eine Menge heißt nach Menger ein halbmetrischer Raum, wenn je zwei verschiedenen Elementen  $p, q$  ein Abstand  $pq = qp > 0$  zugeordnet ist (Dreiecksungleichung wird nicht verlangt). Verf. kennzeichnet durch rein metrische Eigenschaften eine die hyperbolischen und die euklidischen Räume beliebiger Dimension umfassende Klasse halbmetrischer Räume  $\Sigma$  und gibt notwendige und hinreichende Bedingungen rein metrischer Natur dafür, daß ein halbmetrischer Raum  $S$  abstandstreu auf eine Teilmenge eines gegebenen Raumes  $\Sigma$  der Klasse abgebildet werden kann. Die Beweise sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden.  
*Nöbeling* (Erlangen).

**Tricomi, F.: "Densità" di un continuo di punti o di rette e "densità" di una corrispondenza.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 313—316 (1936).

In früheren Noten (vgl. dies. Zbl. 3, 75) hat der Verf. anlässlich der Untersuchung der Verteilung der Schwerpunkte von ebenen Schnitten eines Körpers „Dichten“ für gewisse Abbildungen eingeführt. Bei Abbildungen, die Punkten Punkte zuordnen, ist diese Dichte einfach die Funktionaldeterminante. Bei korrelativen Abbildungen, in der Ebene also bei Abbildungen, die Punkten Gerade zuordnen, ist diese Dichte  $\delta = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}}$ , wo  $x, y$  kartesische Punktkoordinaten und  $u, v$  Linienkoordinaten bezeichnen, die so normiert sind, daß die Geradengleichung die Form  $Xu + Yv + 1 = 0$  annimmt. Hier wird gezeigt, daß  $\delta = \frac{g}{\varkappa}$  ist, wo  $g$  die Geraden-dichte und  $\varkappa$  die Punktdichte im Sinne der Integralgeometrie bedeuten. Analoges gilt für mehr Dimensionen. Ferner werden sämtliche „maßtreuen“ korrelativen Ab-

bildungen der Ebene, bei denen also  $g = r$  ist, bestimmt. Sie entstehen aus einer speziellen, explizit angegebenen durch Zusammensetzen mit einer beliebigen flächentreuen Abbildung.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Santaló, L. A.: Einige Probleme, die sich auf geometrische Wahrscheinlichkeiten beziehen.** Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 11, 87—97 (1936) [Spanisch].

In der Ebene sei ein konvexer Bereich  $K$  gegeben.  $K_1, \dots, K_n$  seien untereinander kongruente unabhängig bewegliche konvexe Bereiche. Für jede Lage von  $K_1, \dots, K_n$ , derart daß jedes  $K_i$  mit  $K$  einen nichtleeren Durchschnitt hat, sei  $j$  der Inhalt desjenigen Teils von  $K$ , der von keinem  $K_i$  bedeckt wird. Es wird der Mittelwert  $\bar{j}$  von  $j$  für alle diese Lagen berechnet, wobei frühere Resultate des Verf. über das kinematische Maß zur Anwendung kommen (vgl. Integralgeometrie IV, nachstehendes Ref., und Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie I, dies. Zbl. 12, 414—415).  $\bar{j}$  läßt sich in einfacher Weise durch  $n$  und die Inhalte und Umfänge von  $K$  und den  $K_i$  ausdrücken. Ferner wird der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  durchgeführt, wenn der Flächeninhalt der  $K_i$  zugleich so gegen 0 geht, daß der Gesamtflächeninhalt von  $K_1, \dots, K_n$  konstant bleibt. Ebenso wird die entsprechende Aufgabe gelöst, wo an Stelle der  $K_i$  kongruente Parallelstreifen treten, sowie deren Analoga im Raume für einen konvexen Körper und  $n$  von Paaren paralleler Ebenen begrenzte kongruente Streifen bzw.  $n$  kongruente konvexe Zylinder. — In Spezialfällen ist die erstgenannte Aufgabe von Wiener (Lehrbuch der darstellenden Geometrie) und Happel [Z. Math. Phys. 61, 43—56 (1913)] behandelt worden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Santaló, L. A.: Integralgeometrie. IV. Über das kinematische Maß in der Ebene.** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 222—236 (1936) [Spanisch].

Nach Berechnung der kinematischen Dichte in der Ebene und Herleitung ihrer wichtigsten Eigenschaften werden Formeln aufgestellt, deren einfachste das kinematische Maß der Menge aller Lagen eines Eibereichs, in denen er einen festen Eibereich schneidet, durch Flächeninhalte und Umfänge der beiden Bereiche ausdrückt. Die interessantesten dieser Resultate und ihre Anwendungen sind in die „Vorlesungen über Integralgeometrie“ von Blaschke aufgenommen worden. Vgl. dies. Zbl. 12, 414—415, wo darüber berichtet wurde.

W. Fenchel (Kopenhagen).

● **Santaló, L. A.: Integralgeometrie V. Über das kinematische Maß im Raum.** (Actualités scient. et industr. Nr. 357. Exposés de géométrie. Publiés par Wilhelm Blaschke. II.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 54 pag.

Ähnlich wie in der vorstehend referierten Arbeit das ebene, behandelt der Verf. hier das räumliche kinematische Maß (das ist das invariante Volumen im Parameterraum der Bewegungsgruppe des Raumes) nebst vielen Anwendungen. Die Hauptresultate bestehen wieder in Formeln, die das kinematische Maß der Menge aller der Lagen einer beweglichen Figur, in denen sie eine feste schneidet, durch Bewegungsvarianten der beiden Figuren ausdrücken. Sind beide Figuren konvexe Körper,  $K$  bzw.  $K_1$ ,  $K$  fest, so ergibt sich für dieses Maß

$$\int_{K \cap K_1 \neq \emptyset} dK_1 = 8\pi^2(V + V_1) + 2\pi(M_1F + MF_1), \quad (*)$$

wo  $V$  und  $V_1$  die Volumina,  $F$  und  $F_1$  die Oberflächen und  $M$  und  $M_1$  die Integrale der mittleren Krümmung von  $K$  bzw.  $K_1$  bezeichnen. Diese Formel geht in die bekannte von Steiner für das Volumen der Parallelkörper über, wenn  $K_1$  die Einheitskugel ist. Wählt man für  $K_1$  speziell eine Strecke, so entsteht eine Formel, die der Verf. an anderer Stelle direkt bewiesen hat (vgl. dies. Zbl. 12, 414). Die obige Formel wird u. a. auch auf den Fall beliebig vieler bewegter Körper erweitert. Ist die feste Figur ein konvexer Körper  $K$ , die bewegliche aber ein konvexer Zylinder  $Z$ , so ergibt sich für das fragliche kinematische Maß

$$\int_{K \cap Z \neq \emptyset} dZ = 4\pi^2 f + \pi^2 F + \pi u M.$$



Hierbei sind  $f$  und  $u$  Flächeninhalt bzw. Umfang eines Normalschnittes von  $Z$ . Wählt man für  $Z$  einen Kreiszylinder mit geeignet beschränktem, festem Radius  $\varrho$ , so erhält man eine Formel, mit deren Hilfe sich die von Bonnesen herrührende Verschärfung der Ungleichung  $M^2 \geq 4\pi F$  von Minkowski auf ähnliche Weise, wie Verf. dies für die isoperimetrische getan hat, in Evidenz setzen läßt (vgl. hierzu dies. Zbl. 12, 414—415, Blaschke). Es besteht nämlich die Relation

$$2\varrho M - F - 4\pi\varrho^2 = \frac{2}{\pi} (\mathfrak{M}_2 + 2\mathfrak{M}_3 + \dots).$$

Hierbei bedeutet  $\mathfrak{M}_r$  das Maß der Menge der Zylinderachsen, für welche der Zylinder genau  $r$  getrennte Schnittkurven mit dem Rand von  $K$  hat. — Schließlich seien Formeln erwähnt, die sich auf nicht notwendig konvexe Gebilde beziehen. Ist beispielsweise die feste Figur eine (offene oder geschlossene) Raumkurve  $C$  der Länge  $L$ , die bewegliche eine (offene oder geschlossene) Fläche  $S$  vom Flächeninhalt  $F$ , so gilt  $\int n dK = 4\pi^2 FL$ , wenn  $dK$  die kinematische Dichte,  $n$  die Zahl der Schnittpunkte von  $C$  und  $S$  bezeichnet und die Integration über alle Lagen von  $S$  erstreckt wird, in denen Schnittpunkte vorhanden sind.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Petkantschin, Bojan: Integralgeometrie. VI. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im  $n$ -dimensionalen Raum.** Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 11, 249—310 (1936).

$E_n$  bezeichne den euklidischen,  $N_n$  den elliptischen  $n$ -dimensionalen Raum. Für die Dichten der  $E_r$  in  $E_n$  bzw.  $N_r$  in  $N_n$ ,  $r < n$ , hat Blaschke (vgl. dies. Zbl. 12, 34) Darstellungen hergeleitet, die auf den folgenden Festlegungen eines  $E_r$  bzw.  $N_r$  beruhen: Ein  $E_r$  wird fixiert durch einen seiner Punkte und  $r$  paarweise orthogonale, zu ihm parallele Richtungen (zu denen noch  $n - r$  paarweise und zum  $E_r$  orthogonale Richtungen hinzugenommen werden). Ein  $N_r$  wird fixiert durch  $r + 1$  paarweise orthogonale, zu ihm gehörige Punkte (zu denen noch  $n - r$  paarweise orthogonale Punkte des zum  $N_r$  polaren  $N_{n-r-1}$  hinzugenommen werden). Für viele Zwecke ist es jedoch nützlich, von anderen Festlegungen der linearen Unterräume auszugehen. Der Verf. formt nun, einer Reihe von verschiedenartigen Festlegungen der Unterräume entsprechend, die Darstellungen der Dichten um. Von den so gewonnenen Formeln werden einige Anwendungen gemacht. Es wird u. a. gezeigt: Im  $E_n$  ist das Maß eines konvexen Körpers an  $E_r$  bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Mittelwert der  $(n - r)$ -dimensionalen Volumina seiner Orthogonalprojektionen auf  $E_{n-r}$ . (Diese Größen stimmen übrigens mit den gemischten Volumina des Körpers und der Einheitskugel überein; vgl. Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, S. 50.) Ferner werden Croftonsche Formeln (in dem dies. Zbl. 12, 118, Varga, genannten Sinne) für die Produkte der Dichten eines  $N_r$  und eines  $N_s$  bzw. eines  $E_r$  und eines  $E_s$  hergeleitet. Die Art dieser Formeln hängt davon ab, ob  $r + s + 1 \geq n$  ist. Als Beispiel sei genannt: Im  $N_n$  ist für  $r + s + 1 > n$  das Produkt der Dichten von  $N_r$  und  $N_s$  gleich dem Produkt der folgenden Größen: der Dichte des Durchschnitts  $N_{r+s-n}$  von  $N_r$  und  $N_s$ , der Dichte von  $N_r$  um den Durchschnitt, der Dichte von  $N_s$  um den Durchschnitt und einem nur von gewissen durch  $N_r$  und  $N_s$  bestimmten Winkeln abhängigen Faktor.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Blaschke, W., und O. Varga: Integralgeometrie. IX. Über Mittelwerte an Eikörpern.** Mathematica, Cluj, 12, 65—80 (1936).

Die Dichte der aus einer Ebene und einer in ihr liegenden Geraden bestehenden Figur läßt sich auf zwei Weisen berechnen. Ist  $K$  ein konvexer Körper und  $s$  die Länge der von der Geraden aus  $K$  ausgeschnittenen Sehne, so führt Integration der beiden mit  $s^n$  multiplizierten Ausdrücke für die Dichte über alle die Lagen der Figur, in denen sie  $K$  schneidet, zu der Formel

$$\int s^n G = \frac{1}{\pi} \int J_n^E E, \quad J_n^E = \int s^n G^E.$$

Hierbei bedeutet  $G$  die Geradendichte,  $E$  die Ebenendichte und  $G^E$  die Dichte der Geraden in  $E$ . Diese Formel enthält eine Reihe bekannter Formeln, die von Cauchy, Crofton, Czuber, Hostinský, Herglotz herrühren. Zu weiteren Formeln gelangen die Verff. durch analoge Behandlung der aus zwei parallelen Geraden bzw. zwei sich schneidenden Geraden bestehenden Figuren. Im ersten Fall entsteht eine Beziehung zwischen den Integralen über die Sehnenpotenzen der Orthogonalprojektionen des Körpers einerseits und den Integralen über die entsprechenden Potenzen der Breiten der ebenen Schnitte andererseits. Im zweiten Fall erhält man eine Beziehung zwischen dem Integral über das Quadrat des Sichtwinkels von einem äußeren Punkt, dem Integral über das Quadrat des Umfanges der ebenen Schnitte und dem Volumen. Schließlich wird über verwandte bisher nicht publizierte Ergebnisse von Herglotz berichtet.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Bose, R. C.: A note on the convex oval.** Bull. Calcutta Math. Soc. 27, 55—60 (1935).

Durch jeden inneren Punkt  $O$  eines Ovals geht wenigstens eine Sehne, deren Mittelpunkt  $O$  ist. Die Anzahl solcher Sehnen (die bei geeigneter Zählung stets ungerade ist) ist gleich der Anzahl der Paare paralleler Tangenten, die von  $O$  gleichen Abstand haben. Die Beweise beruhen auf einfachen Stetigkeitsbetrachtungen. Durch den Flächenschwerpunkt werden stets drei verschiedene Sehnen halbiert. Aus Ergebnissen von Hayashi [Rend. Circ. mat. Palermo 50, 96—102 (1926)] folgt, daß dasselbe für Steiners Krümmungsschwerpunkt gilt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Bose, R. C., and S. N. Roy: Some properties of the convex oval with reference to its perimeter centroid.** Bull. Calcutta Math. Soc. 27, 79—86 (1935).

Als Umfangsschwerpunkt eines Ovals werde der Schwerpunkt einer homogenen Randbelegung bezeichnet. Nach Meissner [Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 54, 309 bis 329 (1909)] fällt der Umfangsschwerpunkt einer Kurve konstanter Breite stets mit ihrem Krümmungsschwerpunkt zusammen. Nach Kubota [Tôhoku Math. J. 14, 20—27 (1918)] ist der Ort der Umfangsschwerpunkte einer Schar paralleler konvexer Kurven eine Gerade. Es werden diese beiden Sätze nochmals abgeleitet und die Analoga für den Umfangsschwerpunkt von zwei den Krümmungsschwerpunkt betreffenden Sätzen von Hayashi [Rend. Circ. mat. Palermo 50, 96—102 (1926)] bewiesen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Berger, K. H.: Eilinen mit perspektiv liegenden Tangenten- und Sehnendreiecken.** S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1936, 1—11 (Abh. 4).

Mit Methoden der synthetischen Geometrie, insbesondere unter Benutzung der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes, wird die folgende, zuerst von H. Liebmann (Synthetische Geometrie 1934, Aufg. 17; dies. Zbl. 9, 29) gestellte Frage beantwortet: Ist die perspektive Lage von Sehnen- und Tangentendreieck (dreier beliebiger Punkte) einer „glatten“ Eilinie (= Kurve, die von jeder Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten wird und in jedem ihrer Punkte genau eine Stützgerade besitzt) eine notwendige und hinreichende geometrische Bedingung dafür, daß die Eilinie ein Kegelschnitt ist? — Die Frage kann bejaht werden. Bei dieser Beweisführung benutzt der Verf. aber — wohl aus der Anschauung — die nirgends bewiesene oder vorausgesetzte Existenz paralleler Stützgeraden in „Gegenpunkten“ einer Eilinie. Damit gekoppelt wird ferner — wohl ebenfalls aus der Anschauung — die Gültigkeit des Fano-Axioms  $F_1$  (von der Krummlage der Nebenecken im vollständigen Viereck) vorausgesetzt und gebraucht. — Jene Eigenschaft (Gültigkeit der „schwächsten“ Schrumpfungsaussage des Pascalschen bzw. Brianchonschen Satzes für drei Eilinienschnitte) als für Kegelschnitte kennzeichnend nachzuweisen gelingt auch leicht analytisch. (Unveröffentlichte briefliche Mitteilung von H. Liebmann an den Referenten.)

M. Steck (München).

● **Filon, L. N. G.: Introduction to projective geometry.** London: E. Arnold & Co. 1935. 16/-.



**Nehring, O.:** Über die Dreiteilung des Winkels nach Eugen Kopf. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1936, 77—79 (H. 1).

**Kober, Oskar:** Zur  $n$ -Teilung des Winkels und des Kreises. Lotos 83, 29—30 (1935).

Das angewendete Verfahren ermöglicht eine verhältnismäßig einfache  $n$ -Teilung jedes Winkels (auch von  $360^\circ$ ). Auszug.

**Todd, J. A.:** Dual vectors and the Petersen-Morley theorem. Math. Gaz. 20, 184 bis 185 (1936).

**Thébault, V.:** Sur une nouvelle sphère associée au tétraèdre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 56, 70—75 (1936).

**Neville, E. H.:** A focus-sharing set of three conics. Math. Gaz. 20, 182—183 (1936).

**Scholz, Edm.:** Eine einfache Ableitung gewisser allgemeiner projektiver Sätze auf affingometrischem Wege. Deutsche Math. 1, 334—337 (1936).

Zwei Punkte  $A, B$  und zwei Strahlen  $u, r$  bedingen bekanntlich ein Doppelverhältnis. In der vorliegenden Abhandlung wird es durch das Doppelverhältnis von vier (orientierten) Dreiecksinhalten ausgedrückt. Die Dreiecke haben paarweise  $A$  oder  $B$  zu einer Ecke und  $u$  oder  $r$  zur entsprechenden Gegenseite. Ein einfaches Sechseck bestimmt drei Doppelverhältnisse, wenn die Punkte  $A, B$  nacheinander mit den drei Paar Gegenecken und die Strahlen  $u, r$  jedesmal mit den restlichen (nicht mit  $A, B$  inzidenten) Gegenseiten des Sechsecks zusammenfallen. Das Produkt der drei Doppelverhältnisse ist Eins. Aus diesem Satze und einer Folgerung über das Viereck werden die Sätze von Pascal und Desargues abgeleitet. Haenzel.

**Krishnaswami Ayyangar, A. A.:** Theory of the general Frégier-point. Math. Gaz. 20, 191—198 (1936).

Es sei  $P$  ein gegebener Punkt und  $S$  ein Mittelpunktskegelschnitt; die harmonische Kegelschnittsenveloppe von  $S$  und die Kreise durch  $P$  seien mit  $s\Phi_P$  bezeichnet. Dann heißt bekanntlich der konjugierte Brennpunkt  $Q$  von  $s\Phi_P$  „allgemeiner Frégier-Punkt“ (liegt  $P$  auf  $S$ , so ist  $Q$  „gewöhnlicher Frégier-Punkt“); eine ausführliche Theorie dieses Punktes entwickelt die vorliegende Arbeit in der Aufstellung und Ableitung einer Reihe geometrischer Beziehungen.  $(P, Q)$  heißen ein „Isoklinpaar“ in Bezug auf  $S$ ;  $P$  heißt „linker“ Isoklinpunkt von  $Q$ ,  $Q$  „rechter“ Isoklinpunkt von  $P$  bezüglich  $S$ . (Wenn  $P$  auf  $S$  liegt, so ist der rechte Isoklinpunkt der Frégier-Punkt; s. H. F. Baker, Principles of Geometry, II, 87). 1. Es werden zuerst Aussagen über solche Kegelschnitte abgeleitet, die ein vorgegebenes Isoklinpaar  $(P, Q)$  besitzen. Dabei wird das Ergebnis erhalten, daß ein beliebiges Isoklinpaar von  $S$  auch ein Isoklinpaar seiner Asymptoten und umgekehrt ist. Sind ferner  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) drei linear unabhängige Kegelschnitte mit gemeinsamem Isoklinpaar  $(P, Q)$ , so sind alle Kegelschnitte, die dasselbe Isoklinpaar besitzen, in dem linearen dreiparametrischen System  $\sum_1^3 \lambda_i S_i + \lambda_4 g_\infty^2 = 0$  enthalten. Hierauf folgt die

wichtige Aussage, daß zwei gegebene Kegelschnitte genau ein Isoklinpaar gemeinsam haben. — 2. Der folgende Abschnitt leitet metrische Eigenschaften eines Isoklinpaares her. Dabei erscheint zuerst die folgende interessante geometrische Aussage für ein Geradenpaar: Ist  $(P, Q)$  ein Isoklinpaar in Bezug auf ein Geradenpaar  $T \equiv (OA, OB)$  (als entartetem Kegelschnitt), so geht a) das Lot von  $P$  auf  $OA$  (oder  $OB$ ) durch den Fußpunkt des von  $Q$  auf  $OB$  (oder  $OA$ ) gezogenen Lotes; b)  $OP$  und  $OQ$  haben gegenüber  $(OA, OB)$  gleiche Neigung; c) es ist  $OP = OQ \cos(\angle AOB)$ . Es folgen ferner leicht zwei weitere metrische Eigenschaften, von denen eine bereits durch J. Wolstenholmes „Mathematical Problems“, 211, Q. 1267 bekannt ist. — 3. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der gleichseitigen Apollonischen Hyperbel durch ein Isoklinpaar. Dabei werden eine Reihe geometrisch interessanter Er-

gebnisse erhalten. Z.B. Sind  $OA$  und  $OB$  ein Paar konjugierter Durchmesser von  $S$ , die die Apollonische Hyperbel in den Punkten  $A$  und  $B$  treffen, so ist  $P$  das Orthozentrum des Dreiecks  $OAB$ , dessen Umkreis durch den linken Isoklinpunkt von  $P$  geht. — 4. Es wird endlich das Isoklinpaar in Zusammenhang mit dem „Fußpunktskegelschnitt“ (pedal-conic) eines Vierecks gesetzt; er geht durch acht durch das Isoklinpaar bestimmte Punkte hindurch. Dabei ergeben sich interessante Zusammenhänge dieses Achtpunktekegelschnitts mit dem bekannten Neunpunktekegelschnitt: Die Asymptoten des ersteren stehen auf denen des zweiten senkrecht; die gemeinsamen Punkte beider Kegelschnitte liegen auf einem Kreis vom Halbmesser  $PR$ , wobei der Punkt  $R$  die Strecke  $PQ$  des Isoklinpaares hälftet. *M. Steck.*

**Vries, Jan de: Konfigurationen von Punkten und Kreisen.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 486—488 (1936).

Es werden Punkt-Geraden-Konfigurationen aufgestellt, und zwar von den Typen:  $(8_3, 6_4)$ ,  $(8_4, 8_4)$ ,  $(8_5, 10_4)$ ,  $(8_6, 12_4)$ ,  $(3n_4, 3n_4)$ , für jedes  $n$  und  $(12_5, 15_4)$ . In den beiden ersten Fällen werden jeweils mehrere verschiedene Konfigurationen nachgewiesen.

*Friedrich Levi* (Calcutta).

**Weiss, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. III. Die Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum. Nicht-euklidischer Fall. (Lies Fundamentalsatz.)** Deutsche Math. **1**, 275—290 (1936).

**Inzinger, Rudolf: Eine Bemerkung zur konstruktiven Behandlung äquilaterer Speertransformationen.** Jber. Deutsch. Math.-Verein. **46**, Abt. 1, 14—19 (1936).

Mit Hilfe der Darstellung äquilaterer Speertransformationen nach Scheffers [Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen; Math. Ann. **60**, 526 (1905)] wird gezeigt, daß auf jedem Speere  $p$  der Ebene ein Linienelement  $(P, p)$  liegt, dessen Strahl  $p$  durch den Punkt  $P_1$  des entsprechenden Elementes  $(P_1, p_1)$  hindurchgeht. Jede äquilaterge Speertransformation bestimmt zwei zweiparametrische Mannigfaltigkeiten von solchen „rechtsgebundenen“ Linienelementepaaren. Als Berührungstransformation bedingt die äquilaterge Speertransformation daher zwei Scharen entsprechender Elementevereine, die durch rechtsgebundene Linienelemente aufeinander bezogen sind. Die Speertransformation ist durch ein Paar  $(k_1, k)$  entsprechender Linienelementevereine bestimmt und läßt sich aus ihm konstruktiv vervollständigen. *Haenzel.*

● **Müller †, Emil: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Vollst. neu bearb. v. Erwin Kruppa. 4. Aufl. Tl. 1: Projektion auf eine Bildebene. Tl. 2: Zugeordnete Normalrisse. Krumme Flächen. Tl. 3: Axonometrie. Perspektive. Landkartenelemente.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1936. Tl. 1: VI, 130 S. u. 135 Fig. RM. 7.80, Tl. 2: VI, 112 S. u. 101 Fig. RM. 6.80, Tl. 3: VI, 148 S. u. 130 Fig. RM. 8.60.

Das Lehrbuch zeichnet sich in der vorliegenden weitgehenden Neubearbeitung in höherem Maße als bisher durch organischen und gleichzeitig knappen Aufbau aus. Der erste Teil enthält die Grundbegriffe der Zentral- und Parallelprojektion unter Voranstellung der geometrischen Invarianten, im Anschluß daran die allgemeine Kollineation und die Affinität in der Ebene. Diese geometrischen Grundlagen werden nach der differentialgeometrischen Seite ergänzt durch das Studium der mehrmals stetig differenzierbaren ebenen Kurven, der regulären und singulären Kurvenpunkte, der Krümmung, der Evolventen, Evoluten u. a. Nach interessanten Ausführungen über die Abbildung ebener Kurven durch Zentral- und Parallelprojektion folgen entsprechende Untersuchungen über die Raumkurven, Krümmung, Torsion, singuläre Punkte sowie ihre Abbildung durch Zentralprojektion. Ausführungen über die Tangentenflächen der Raumkurven leiten zur Betrachtung der krummen Fläche über. Die Methode der kotierten Projektion mit Anwendungen und eine ausgiebige Behandlung der Kurven, Kegel und Zylinder zweiter Ordnung schließen den ersten Teil ab. — Der zweite Teil beginnt mit der theoretischen Behandlung des Grund- und Aufrißverfahrens. Die gründlichen Entwicklungen des Teiles I ermöglichen es dann sofort eine Reihe von wichtigen Flächenklassen zu behandeln: Rotationsflächen, graphisch



gegebene Flächen, allgemeine Schraubenflächen einschließlich Regelschraubenflächen, Flächen zweiter Ordnung und windschiefe Regelflächen. Als notwendige Ergänzung dieses Abschnittes schließt sich die darstellende Geometrie der Flächenkrümmung an. — Der dritte Teil umfaßt die Axonometrie, Zentralprojektion und Landkartenentwürfe. Die Axonometrie wird unter Voranstellung des Pohlkeschen Satzes behandelt, zuerst die allgemeine schiefe Axonometrie, dann die orthogonale. Die Grundaufgaben der Lage und die des Maßes sind voneinander getrennt. Der zu diesem Gebiete gehörigen Parallelperspektive (Schräg- und Schräggrundrißverfahren) ist aus methodischen Gründen ein besonderes Kapitel gewidmet, um sie als selbständige Abbildungsmethode darzustellen. Auch der Abschnitt über die Zentralperspektive zeichnet sich durch methodische Kürze aus. Ihm sind elementare Ausführungen über die Photogrammetrie zugewiesen. Auf Grund der Bekanntschaft mit den perspektiven Kollineationen folgt ein Kapitel über Reliefperspektive. Für das Schlußkapitel der Landkartenentwürfe stehen natürlich die Begriffe der Flächentreue, der Winkeltreue und der Längentreue bestimmter Kurvennetze im Vordergrund. Behandelt werden die orthographische, die stereographische, die gnomische Projektion, der flächentreue Lambertsche Entwurf, die Mercatorkarte und der Entwurf von Mollweide. *Haenzel* (Karlsruhe).

● **Long, Louis:** *Méthodes de résolution des problèmes de lieux d'enveloppes et de constructions géométriques et applications.* 2. édit. Paris: Gauthier-Villars 1936. 124 pag. et 105 fig. Frs. 12.—.

### Algebraische Geometrie:

● **Gambier, Bertrand:** *Enveloppe d'une famille de quadriques à un paramètre.* Paris: Gauthier-Villars 1936. 40 pag. Frs. 12.—.

**Bell, Clifford:** *On a theorem in higher plane curves.* Math. Gaz. 20, 186—187 (1936).

**Durairajan, N.:** *Foci in complex geometry.* Math. Student 3, 138—140 (1935).

Une courbe plane algébrique de classe  $n - 1$  a, en général,  $n - 1$  foyers réels (à distance finie); ici l'a. donne des relations métriques se rapportant aux foyers d'une courbe de classe  $n - 1$  touchant les  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  côtés d'un  $n$ -gone plan complet; relations qui généralisent des propriétés bien connues pour  $n = 3$ . Si la courbe envisagée est une parabole de Clifford, c'est-à-dire si elle touche  $n - 2$  fois la droite à l'infini du plan, les foyers à distance finie se réduisent à un seul; afin qu'un  $n$ -gone admette une courbe de classe  $n - 1$  inscrite de cette espèce, doivent (pour  $n > 4$ ) être vérifiées des conditions opportunes: dans ce cas le  $n$ -gone détermine univoquement un point (le foyer de la courbe susdite). Tous les calculs sont effectués d'une façon simple, en se servant de la représentation classique des points réels du plan avec les nombres complexes. *Beniamino Segre* (Bologna).

**Výčichlo, F.:** *Sur certaines constructions des courbes planes et rationnelles du 3<sup>me</sup> et 4<sup>me</sup> ordre.* Enseignement Math. 34, 325—332 (1936).

Verf. gibt eine Konstruktion der ebenen biquadratischen Kurve, die durch drei Doppelpunkte und fünf einfache Punkte gegeben ist, und eine Konstruktion der ebenen kubischen Kurve, wovon ein Doppelpunkt und sechs einfache Punkte gegeben sind. Auch gibt er Konstruktionen für die Doppelpunktstangenten der letztgenannten Kurve und für die Tangente derselben Kurve in einem einfachen Punkte. Diese Konstruktionen werden mit Hilfe einer quadratischen Transformation gefunden. Bei der Ableitung wendet Verf. die Symbolik der Vektorrechnung an. Wenn  $O$  ein fester Punkt außerhalb der Ebene der zu konstruierenden Kurve ist, so bestimmt er einen Punkt  $X$  dieser Ebene durch einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor mit Anfangspunkt  $O$  und Träger  $OX$ ; eine Gerade  $a$  derselben Ebene bestimmt er durch einen vom Nullvektor verschiedenen und zu der Ebene  $Oa$  senkrechten Vektor mit Anfangspunkt  $O$ . Die Verbindungsgerade von zwei gegebenen Punkten und der Schnittpunkt von zwei gegebenen Geraden werden dann vom äußeren Produkt der beiden gegebenen

Vektoren bestimmt; ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn das innere Produkt der beiden zugehörigen Vektoren verschwindet.

*G. Schaake* (Groningen).

**Thalberg, Olaf M.: Properties of the general pencil of rational cubics derived by means of plane involutions.** Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1936, 1—11 (Nr 3).

Drei involutorische Cremonasche Verwandtschaften in der Ebene, die mit einem Büschel rationaler Kurven 3. Ordnung verbunden sind. Es seien  $S_6$  der doppelte und  $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$  die fünf einfachen Basispunkte eines solchen Büschels; zwei Punkte  $P, P'$  werden zunächst als entsprechend bezeichnet, wenn sie auf derselben  $C^3$  des Büschels liegen, und wenn  $PP'$  durch den weiteren Schnittpunkt  $R$  derselben  $C^3$  mit  $S_1 S_2$  hindurchgeht. Die zweite Transformation erhält man, wenn  $S_1 S_2$  mit dem Kegelschnitte  $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$  ersetzt wird. In der dritten Transformation liegen immer  $P, P'$  auf derselben  $C^3$  des Büschels, und besitzen sie denselben Tangentialpunkt. Die drei Transformationen haben die Ordnungen 5, 6, 10. Anwendung auf die Bestimmung des Ortes der sextaktischen Punkte der  $C^3$  des Büschels. *E. G. Togliatti*.

**Du Val, Patriek: Reducible exceptional curves.** Amer. J. Math. 58, 285—289 (1936).

A characterization of reducible exceptional curves on an algebraic surface, transformable into a sequence of points  $O_i$  along a single branch has been given by Barber and Zariski (this Zbl. 10, 371). In the present paper these conditions are given in a simpler and a more compact form, and it is shown that the result holds also for the case in which the points  $O_i$  do not lie on a single branch. — Let  $L_1, L_2, \dots, L_n$  be irreducible curves of genus 0, and let  $n = (n_{ij})$  be the matrix of their intersection numbers. A necessary and sufficient condition in order that a convenient combination of the curves  $L_i$  be an exceptional curve, is that the matrix  $n$  be of the form  $-mm'$ , where  $m'$  is the transposed of  $m$ , and where  $m$  is a square matrix having the following properties: (1) every element of the main diagonal is 1, (2) every element at the left of the main diagonal is 0, and (3) certain elements to the right of the diagonal are  $-1$ , and the rest 0. — If  $O_1, O_2, \dots, O_n$  are the points whose immediate neighborhood corresponds to the curves  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , the total neighborhood of  $O_i$  corresponds to an exceptional curve  $Q_i$ , and the expression of  $Q_i$  in terms of the curve  $L_j$  is given by the matrix relation  $Q = n^{-1}L$ , where  $Q(L)$  is the set of curves  $Q_i(L_i)$  arranged as a matrix of 1 column and  $n$  rows. *Zariski*.

**Wolkowitsch, David: Sur une famille de surfaces du quatrième ordre.** C. R. Acad. Sci., Paris 202, 2036—2038 (1936).

L'auteur appelle cycléides les surfaces engendrées par une circonférence variable dont le plan tourne autour d'un axe situé dans ce plan et qui en même temps se varie ayant pour diamètre une corde de la directrice (= une courbe située dans un plan normal à l'axe). L'auteur examine deux cycléides:  $\Gamma_1$  dont la directrice est une conique à centre sur l'axe et  $\Gamma_2$  — un cas spécial de  $\Gamma_1$  quand la conique dégénère en deux droites parallèles.  $\Gamma_1$  est la surface de singularités du complexe de Painvin relatif à un hyperboloïde à hyperbole principale équilatère. L'axe est une génératrice double. Les cônes circonscrits, issus des points de l'axe sont du second degré, ils dégénérant en deux plans pour les points pinces. Les courbes de contact avec  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$  sont bi-quadratiques gauches conjuguées aux systèmes de cercles de la surface. Pour  $\Gamma_2$  les trajectoires orthogonales des cercles sont hyperboles. *S. Finikoff* (Moscou).

**Godeaux, Lucien: Sur une surface de genres un et de rang trois.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 108—111 (1936).

Dans des travaux antérieurs (Ann. École norm. sup. 1914, 357—430; 1919, 51—70; Acad. polyt. Porto 1921, 15—23; Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1932, 64—66; Bull. Acad. Roy. Belgique 1922, 443—456) l'auteur a montré qu'une surface de genres un et de rang trois (cad. image d'une involution d'ordre trois appartenant à une surface de genres un) peut se ramener par une transformation birationnelle à une surface  $\Phi$  d'ordre  $2\pi - 2$  à sections hyperplanes de genre  $\pi$  appartenant à un espace linéaire  $S_\pi$ , et



il a construit cette surface  $\Phi$  lorsque c'est un plan double ou une surface du quatrième ordre. Il la construit ici dans le cas  $\pi = 4$ . P. Dubreil (Nancy).

**Godeaux, Lucien:** Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée. (II. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 438—446 (1936).

Suite de l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à la surface de Humbert généralisée. L'auteur considère ici deux involutions du 5-ème ordre ayant la première 5 points unis non parfaits, la seconde 3 points unis non parfaits et deux points unis parfaits. P. Dubreil (Nancy).

**Gussenhoven, Lila:** Remarques sur les variétés hyperalgébriques. Mathesis 50, 130—132 (1936).

### Differentialgeometrie:

**Plancherel, M.:** Sur les systèmes isogonaux de courbes dont le rapport des courbes est constant. Comment. math. helv. 8, 354—358 (1936).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Schneiden sich zwei einparametrische Kurvenscharen in der Ebene unter festem Winkel  $\theta$  und ist das Verhältnis  $q$  der Krümmungen der beiden Scharkurven in ihrem Schnittpunkt konstant, so sind die Scharen isogonale Trajektorien einer Geradenschar und umgekehrt. Die Winkel, unter denen die Geraden geschnitten werden, bestimmen sich elementar aus  $\theta$  und  $q$ . Die Fragestellung für  $\theta = \frac{\pi}{2}$  stammt aus der Elastizitätstheorie. W. Fenchel (Kopenhagen).

**Su, Buchin:** Invariants of intersection of two curves in space. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 25, 22—33 (1936).

L'auteur examine quelques droites attachées à l'intersection de deux courbes gauches  $C, \bar{C}$  ayant au point commun  $O$  deux tangentes  $t, \bar{t}$  différentes et le plan osculateur  $(t, \bar{t})$  commun. Soit  $K$  (resp.  $\bar{K}$ ) le faisceau de cônes du second degré qui ont le contact du 4<sup>me</sup> ordre avec  $C$  ( $\bar{C}$ ) au point  $O$ ,  $l$  — les droites du faisceau  $t, \bar{t}$ ; les droites  $g$  conjuguées communes par rapport à  $K$  et à  $\bar{K}$  de  $l$ , enveloppent un cône du second degré  $K_2$ ; la droite polaire du plan  $(t, \bar{t})$  par rapport à  $K_2$  est la droite de Bompiani de  $C, \bar{C}$ . Des nouvelles droites sont définies: les directrices de la congruence qui appartient à deux complexes linéaires osculateurs de  $C$  et de  $\bar{C}$  au point  $O$  et une droite  $L$ , à savoir: soit  $c$  (resp.  $\bar{c}$ ) la section de la surface de tangentes de  $C$  ( $\bar{C}$ ) par le plan  $(t, \bar{t})$ ,  $c_2$  (resp.  $\bar{c}_2$ ) — la conique osculatrice de  $c$  ( $\bar{c}$ ) qui coupe  $\bar{t}$  (resp.  $t$ ) au point  $P$  ( $\bar{P}$ ). La droite  $P\bar{P}$  est la droite  $L$ ; elle dépend du voisinage de 5<sup>me</sup> ordre de  $C, \bar{C}$ . S. Finikoff (Moscou).

**Boos, Pierre:** Propriétés caractéristiques de courbes ou de surfaces. Ann. École norm., III. s. 53, 125—182 (1936).

La première partie qui est parue contient l'étude des courbes  $(P)$  et  $(P')$  qui généralisent la propriété élémentaire de cercle: l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit l'arc du cercle de son extrémité, à longueur  $l$  fixe du corde qui le sous tend, ne dépend pas de l'abscisse curviligne  $s$  de cette extrémité. L'auteur trace l'arc  $MaM_1$  sur une surface  $S$ , remplace la corde par une géodésique  $MbM_1$  et prend pour  $\alpha$  l'angle entre  $MaM_1$  et  $MbM_1$ . Cela posé, la courbe  $(P')$  est définie par la propriété:  $l = f(\alpha) \varphi(s)$ ,  $(P)$  — par la propriété:  $l = f(\alpha)$ . Par un calcul ingénieux mais laborieux il montre que la courbe  $(P)$  est un parallèle virtuel d'une surface applicable sur une surface de révolution,  $(P')$  est une hélice conique d'une surface spirale de Maurice Levy ou lui correspond dans l'applicabilité. Il en établit diverses propriétés relatives à l'aire entre  $MaM_1$  et  $MbM_1$ , à la flèche de  $MM_1$  (= la longueur de géodésique orthogonal à  $MaM_1$  et  $MbM_1$ ) ou au rapport des arcs  $MaM_1, MbM_1$  etc. S. Finikoff (Moscou).

**Mehmke, R.:** Zur Geometrie der konformen Abbildungen. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1936, 1—6 (Abh. 1).

Une direction de niveau (Nullrichtung) de  $n$ -ième espèce, relative à une

fonction  $u(x, y)$ , est une direction — sortant d'un point du plan  $xy$  — suivant laquelle  $d^n u = 0$ . Un point générique du plan  $xy$  est l'origine de  $n$  directions de niveau de  $n$ -ième espèce; et les courbes enveloppées, dans le plan, par ces directions peuvent s'appeler les courbes de niveau (Nullkurven) de  $n$ -ième espèce, relatives à la fonction  $u(x, y)$ . — Si  $u + iv$  est une fonction monogène de  $x + iy$ , les fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  satisfont, comme il est classique, à l'équation de Laplace et aux conditions de monogénéité; ces équations différentielles conduisent respectivement aux propriétés suivantes: Les courbes de niveau de 2-ième espèce relatives à la fonction  $u(x, y)$  et à la fonction  $v(x, y)$  constituent deux systèmes doubles orthogonaux, chacun desquels est le réseau diagonal de l'autre. Une interprétation géométrique analogue peut être donnée pour une équation aux dérivées partielles linéaire homogène d'ordre quelconque. *Beniamino Segre* (Bologna).

**Rangachariar, V.: Some theorems on geodesic curvature and geodesic parallels.** Bull. Calcutta Math. Soc. 27, 87—90 (1935).

Soit  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(t)$  trois familles de courbes,  $\alpha = \text{const}$  l'angle de  $(a)$  et  $(b)$ ,  $\theta$  — l'angle de  $(a)$  et  $(t)$ . En calculant de divergence du vecteur unitaire tangent de  $(t)$  l'auteur démontre: Les courbes  $(a)$  étant géodésiquement parallèles, si la courbe  $t$  possède deux propriétés des trois suivantes, elle en possède la troisième: 1°  $t$  est géodésique, 2°  $\theta = \text{const}$ , 3°  $t$  est la ligne de striction de  $(b)$ . Les lignes de striction de deux familles des trajectoires obliques de  $\infty$  courbes géodésiquement parallèles se coïncident. Si la courbure géodésique de chaque ligne  $a$  est constante le long de  $(b)$  et vice versa, la courbure totale de la surface est négative. *S. Finikoff* (Moscou).

**Srinivasiengar, C. N.: On a property of the focal surface.** Math. Student 3, 126—132 (1935).

Die Gleichungen  $F_r(x, y, z, a, b) = 0$  ( $r = 1, 2$ ), worin  $F_1$  und  $F_2$  keine irrationale oder transzendente Ausdrücke enthalten, bestimmen eine Kurvenkongruenz. Jede Kurve dieser Kongruenz ist der vollständige Durchschnitt zweier Flächen, die denselben Werten von  $a$  und  $b$  zugeordnet sind. Ist  $b$  eine Funktion von  $a$ , so erzeugen die Kurven eine Fläche, die die Fokalfläche der Kongruenz in den Fokalfpunkten dieser Kurven berührt, wenn die Funktion  $b$  nicht der Differentialgleichung  $\lambda(a, b, \frac{db}{da}) = 0$  genügt, die man bekommt durch Elimination von  $x, y, z$  zwischen den vier Gleichungen  $F_r(x, y, z, a, b) = 0$  und  $\frac{\partial F_r}{\partial a} + \frac{\partial F_r}{\partial b} \frac{db}{da} = 0$ . Verf. untersucht nun, in welchen Fällen eine oder mehrere der Flächen, die der genannten Differentialgleichung genügen, die Fokalfläche berühren. Im allgemeinen werden diese Flächen die Fokalfläche nicht berühren, aber es können isolierte Ausnahmen existieren. Verf. betrachtet im besonderen die Kongruenz  $f_1(x, y, z, a) = 0$ ,  $f_2(x, y, z, b) = 0$ . Er bringt diese Gleichungen in die Form  $u = a$ ,  $v = b$  und unterscheidet zwei verschiedene Fälle, je nachdem die beiden Flächensysteme  $u = a$  und  $v = b$  verschiedene oder zusammenfallende einhüllende Flächen besitzen. Schließlich werden Beispiele der vom Verf. gefundenen Fälle gegeben. *G. Schaake* (Groningen).

**Sauer, Robert: Projektive Kinematik wackeliger Flechtwerke.** Mh. Math. Phys. 43, 215—224 (1936).

(X) (Flechtwerke) est l'assemblage des quadrilatères plans ou gauches qui sont réunis par leurs arêtes. Chaque sommet d'un quadrilatère appartient à quatre faces. (X) est déformable  $A$  (wackelig flächenstarr) si l'on peut déplacer les sommets à distances infiniment petites d'ordre  $\varepsilon$  sans déformer d'ordre  $\varepsilon$  les faces. Définition analogue pour la déformation  $B$  (aux angles polyédriques durs). Le déplacement d'un quadrilatère  $(ik)$  dans une déformation  $A$  soit déterminé par le vecteur de rotation infiniment petit  $\varepsilon \eta_{ik}$  et le vecteur d'entraînement  $\varepsilon \bar{\eta}_{ik}$ . En réunissant les points  $\eta_{i,k}, \eta_{i+1,k}, \eta_{i,k+1} \dots$  (à rayon-vecteur  $\eta_{ik}$  etc.), resp.  $\bar{\eta}_{ik} \dots$  on obtient l'assemblage  $(Y)$ , resp.  $(\bar{Y})$ . Les arêtes de  $(X)$  et  $(Y)$  sont parallèles, ceux de  $(X)$  et  $(\bar{Y})$  perpendiculaires.



Les déplacements  $\bar{t}_{ik}^h$  des sommets de quadrilatère  $(ik)$  de  $(X)$  déterminent l'assemblage  $(\bar{X})$ . Les arêtes de  $(X)$  et  $(\bar{X})$  sont perpendiculaires. Si  $(X)$  est déformable  $A$ ,  $(Y)$  l'est également avec l'image de la déformation  $(X)$ ,  $(X)$ . On détermine les images  $(Y)$ ,  $(\bar{Y})$ ,  $(\bar{X})$  de la déformation  $B$  de  $(X)$  analogiquement en remplacent les faces par les angles polyédriques. Si  $(X)$  est déformable  $B$ , ses quadrilatères sont plans. Si  $(X)$  est à quadrilatères plans et déformable  $A$  (resp.  $B$ ), l'assemblage correlative  $(X^*)$  est à quadrilatères plans et déformable  $B$  (resp.  $A$ ). Si  $(X)$  est déformable  $A$  et aux angles polyédriques plans, l'assemblage correlative  $(X^*)$  est de la même nature. L'assemblage  $(X)$  correspond à un réseau d'une surface. S'il est à quadrilatères plans, le réseau est conjugué; s'il est aux angles polyédriques plans, le réseau est composé des asymptotiques. *S. Finikoff (Moscou).*

**Myers, Sumner Byron: Isometries of 2-dimensional Riemannian manifolds into themselves.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 297—300 (1936).

Es werden mehrere einfache Sätze über die isometrischen Abbildungen vollständiger differentialgeometrischer Flächen in sich mitgeteilt, von denen einige hier genannt seien: Bei einer vollst. diffgeom. Fläche mit negativer Eulerscher Charakteristik ist die Gruppe der Isometrien der Fläche in sich diskret. Die Flächen mit nichtnegativer Charakteristik lassen bei geeigneter Metrik kontinuierliche Gruppen von Isometrien zu. Jede Isometrie einer vollst. diffgeom. Fläche in sich ist topologisch (sogar konform) äquivalent einer Isometrie einer homöomorphen Fläche konstanter Krümmung in sich. Jede Isometrie mit einem Fixpunkt  $O$  führt den Ort der Minimumpunkte bzgl.  $O$  (im Sinne des Verf., vgl. dies. Zbl. **12**, 275 u. **13**, 322) in sich über. Diese Sätze sollen an anderer Stelle zu eingehenderer Untersuchung der Isometrien mit Fixpunkt herangezogen werden. *W. Fenchel (Kopenhagen).*

● **Dubourdieu, J.: Questions topologiques de géométrie différentielle.** Mém. Sci. math. Fasc. **78**, 64 pag. (1936).

Eine einheitliche Darstellung der Invariantentheorie der Gewebe mit Hilfe von Cartans Kalkül der Differentialformen. Nach einer kurzen Einleitung über diesen Kalkül werden behandelt: ebene Kurvengewebe, insbesondere solche, die sich auf Geradengewebe abbilden lassen, Flächengewebe und ihre Abbildbarkeit auf Ebenengewebe, schließlich die Invariantentheorie zweier Kurvenscharen im Raum. *G. Bol.*

## **Topologie:**

**Mazurkiewicz, Stefan: Über die Definition der Primenden.** Fundam. Math. **26**, 272 bis 279 (1936).

The author shows that the prime ends (in the sense of Carathéodory) of a simply connected plane domain may be obtained by introducing directly a suitably chosen metric (the prime-end-metric) into the domain and applying next the well known Cantor-Meray-Hausdorff process of "completing" a metric space. That such a metric exists is of a course a consequence of Carathéodory's well known result, but that it can be introduced directly into the domain in a purely set-theoretic manner is the remarkable achievement of the present paper. *G. T. Whyburn (Virginia).*

**Ward, A. J.: The topological characterisation of an open linear interval.** Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 191—198 (1936).

Verf. zeigt: Ein metrischer, separabler, zusammenhängender und lokal zusammenhängender Raum  $R$ , in dem für jeden Punkt  $P$  die Menge  $R - P$  aus genau zwei Komponenten besteht, ist homöomorph mit dem offenen Intervall  $0 < x < 1$ .

*Nöbeling (Erlangen).*

**Alexander, J. W.: On the connectivity ring of a bicompact space.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 300—303 (1936).

Bikompakte Räume werden als abgeschlossene Punktmengen der Tychonoffschen Universalräume [vgl. Tychonoff, Math. Ann. **102**, 544f. (1930)], hier „Cartesische Räume“ genannt, betrachtet. In diesen Räumen werden zunächst Zellen und Zellen-

komplexe definiert. Dies geschieht wie folgt: Ein endliches System linearer Funktionen von der Form  $x_i - c_{ij}$  (wobei  $x_i$  Koordinaten im Tychonoffschen Raume und  $c_{ij}$  Konstanten sind) heißt ein Gitter (eine „Quaderzerlegung“). In jedem Punkt  $p$  definiert man  $\sigma_{ij}(p) = 1, 0$  oder  $-1$ , je nachdem in  $p$  die Funktion  $x_i - c_{ij}$  positiv, Null oder negativ ist. Die Gesamtheit der Werte aller  $\sigma_{ij}$  im Punkte  $p$  heißt die Signatur dieses Punktes. Punkte mit gleicher Signatur bilden eine Zelle. Ist  $\alpha$  die Dimensionszahl (d. h. die Kardinalzahl der Koordinaten) des Tychonoffschen Raumes  $R^\alpha$  und gibt es in der Signatur einer Zelle genau  $k$  Nullen, so heißt die Zelle  $(\alpha - k)$ -dimensional. Dadurch, daß  $\pm$  Einsen durch Nullen ersetzt werden, wird der Übergang von einer Zelle zu deren Randzellen vollzogen. Die Definition der Zellen führt in üblicher Weise zu den Definitionen der algebraischen Komplexe, der Zyklen und der Homologie. Außerdem werden der Unterteilungsbegriff (Hinzufügung neuer Gitterfunktionen) und der Schnittbegriff definiert. Alle diese Definitionen werden sodann auf den Fall offener Mengen übertragen, so daß man insbesondere zu einer Definition der  $(\alpha - k)$ -dimensionalen Bettischen Gruppe einer offenen Menge  $G = R^\alpha - F$  gelangt; diese Gruppe wird als  $k$ -dimensionale Zusammenhangsgruppe des bikompakten Raumes  $F$  definiert. Ist  $F$  ein Kompaktum, so ist die  $k$ -dimensionale Zusammenhangsgruppe von  $F$  im Sinne der Pontrjaginschen Charakterentheorie zu der  $k$ -dimensionalen Bettischen Gruppe von  $F$  nach dem Koeffizientenbereich der modulo 1 reduzierten reellen Zahlen dual. Die Schnitttheorie gestattet den Übergang von den Zusammenhangsgruppen zum entsprechenden Ring. Zum Schluß wird der Invarianzbeweis für die Zusammenhangsgruppen und Schnittringe kurz skizziert. *P. Alexandroff.*

**Kaufmann, B.:** On the extension of the Pflastersatz. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 238—247 (1936).

Der erste Teil der Arbeit enthält eine Beweisskizze für den folgenden Satz [vermutungsweise ausgesprochen in Alexandroff, Dimensionstheorie; Math. Ann. **106**, 161—238 (1932)]:  $F$  sei ein  $r$ -dimensionales Kompaktum im  $R^n$ ; jede  $p$ -dimensionale Homologie,  $0 \leq p \leq r - 1$ , in  $F$  kann durch die Entfernung einer höchstens  $(r - p - 1)$ -dimensionalen abgeschlossenen Teilmenge von  $F$  zerstört werden, während es andererseits zu jedem  $p$ ,  $0 \leq p \leq r - 1$ , eine  $p$ -dimensionale Homologie gibt, welche durch keine abgeschlossene Teilmenge von  $F$ , deren Dimension kleiner als  $r - p - 1$  ist, zerstört werden kann. Dieser Satz, für dessen erste Hälfte auch ein unpublizierter Beweis von Pontrjagin vorliegt, wird auf einen Satzsatz bzw. auf einen neuen Phragmén-Brouwerschen Satz (im Sinne des Ref.) zurückgeführt. Der zweite Teil der Arbeit verallgemeinert den bekannten Pflastersatz der Dimensionstheorie in der Richtung, daß die Existenz beliebig kleiner Cantorscher Mannigfaltigkeiten von jeder die Dimension des ganzen Kompaktums nicht übertreffenden Dimension behauptet wird, auf denen Punkte höchster Ordnung (in bezug auf die gegebene Überdeckung) liegen. Diese und weitere Verallgemeinerungen werden allerdings unter zusätzlichen Voraussetzungen ausgesprochen, deren Beseitigung für eine spätere Publikation in Aussicht gestellt ist. Die Überlegungen der Arbeit benutzen wesentlich die Resultate einer Abhandlung des Verf., die demnächst in den Ann. of Math. erscheinen soll, wodurch die Darstellung selbst für den Fachmann sehr erschwert wird. *P. Alexandroff.*

**Alexandroff, P. S.:** Zur Theorie der topologischen Räume. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **2**, 55—58 (1936).

Eine Menge  $R$  heißt ein  $T_0$ -Raum, wenn in  $R$  Umgebungen definiert sind, die den drei ersten Hausdorffschen Axiomen und dem Kolmogoroffschen Trennungssaxiom genügen (letzteres besagt, daß von je 2 Punkten mindestens einer eine den anderen nicht enthaltende Umgebung besitzt). Ist das schärfere Hausdorffsche Trennungssaxiom erfüllt (je 2 Punkte haben fremde Umgebungen), so spricht man von einem Hausdorffschen Raum. Es sei  $\tau$  das Gewicht von  $R$ , d. h. die kleinste Kardinalzahl mit der Eigenschaft, daß in  $R$  ein  $R$  erzeugendes Umgebungssystem der Mächtigkeit  $\tau$  existiert. — Als Diskontinuum  $D_\tau$  wird definiert die Menge aller Systeme  $\xi = (x_\alpha)$ , wo  $\alpha$  eine



Menge der Mächtigkeit  $\tau$  von Werten durchläuft und  $x_\alpha = 0$  oder 1 ist; als Umgebung  $U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(\xi^0)$  von  $\xi^0 = (x_\alpha^0)$  wird erklärt die Menge aller Punkte  $\xi = (x_\alpha)$  mit  $x_\alpha = x_\alpha^0$  für  $\alpha = \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ); sind alle  $x_{\alpha_i} = 0$ , so spricht man von einer Umgebung erster Art. Es ist  $D_\tau$  ein bikompakter Hausdorffscher nulldimensionaler Raum. Verf. zeigt: Jeder  $T_0$ -Raum  $R$  vom Gewicht  $\tau$  ist eindeutiges stetiges Bild  $\varphi(X)$  einer Teilmenge  $X$  von  $D_\tau$ . Nimmt man eine beliebige Menge  $X$  von  $D_\tau$  und erklärt in  $X$  als Umgebungen nur die Umgebungen erster Art, so entsteht ein  $T_0$ -Raum, und man erhält auf diese Weise alle  $T_0$ -Räume mit Gewichten  $\leq \tau$ . Jeder bikompakte Hausdorffsche Raum  $R$  ist eindeutiges stetiges Bild eines nulldimensionalen bikompakten Hausdorffschen Raumes mit demselben Gewicht wie  $R$ . Erklärt man im Raum  $R$  mit dem Gewicht  $\tau$  die Summe bzw. den Durchschnitt von höchstens  $\tau$  abgeschlossenen bzw. offenen Mengen als  $F_\sigma$  bzw.  $G_\delta$ , so gilt: Ist im  $T_0$ -Raum  $R$  jede offene Menge ein  $F_\sigma$ , so bildet die obige Abbildung  $\varphi$  jede offene Teilmenge von  $X$  auf ein  $F_\sigma$ , jede abgeschlossene Teilmenge von  $X$  auf ein  $G_\delta$  von  $R$  ab. *Nöbeling.*

**Alexandroff, P., und A. Kolmogoroff: Endliche Überdeckungen topologischer Räume.** Fundam. Math. **26**, 267—271 (1936).

A finite system of closed (or open) subsets  $A_1, A_2, \dots, A_s$  of a topological space  $F$  is called a closed (open) multiplicative covering of  $F$  provided  $F = \sum_i A_i$  and every non-vacuous product  $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}$  of elements of  $S$  is itself an element of  $S$ . The largest number  $\lambda$  such that there exists a monotone decreasing sequence of distinct elements  $A_{i_1} \supset A_{i_2} \supset \dots \supset A_{i_\lambda}$  is called the length of such a covering  $S$ . The authors study the relation between length and order of such coverings (clearly  $\lambda \leq \text{order of } S$ ) and in particular obtain the theorem that for  $\varepsilon$  sufficiently small, the length of every closed (or open) multiplicative  $\varepsilon$ -covering of an  $n$ -dimensional compact metric space  $F$  is not less than  $n + 1$ . Two proofs are given for this theorem, the first treating both closed and open coverings simultaneously and the second having the advantage of greater directness. The theorem is extended to arbitrary normal spaces, which are not necessarily metrisable, separable or compact. *G. T. Whyburn* (Virginia).

**Alexandroff, Paul, et Léon Pontrjagin: Les variétés à  $n$  dimensions généralisées.** C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1327—1329 (1936).

Sei ein kompakter metrischer Raum und  $a$  ein Punkt von  $F$ . Verff. sagen,  $F$  sei regulär im Punkte  $a$  bez.  $r$  als Dimension, wenn  $a$  eine Umgebung  $V(a)$  besitzt, so daß gilt: 1. In  $F$  existiert ein  $r$ -dimensionaler wahrer Relativzyklus  $Z \bmod F - V$  mit ganzen Koeffizienten, der für keine Umgebung  $U \subset V$  von  $a$  homolog  $0 \bmod F - U$  bez. rationaler Koeffizienten ist; 2. für jede Umgebung  $U \subset V$  von  $a$  gibt es eine Umgebung  $U' \subset U$  von  $a$ , so daß für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert derart, daß für jedes ganze  $m$  jeder  $\delta$ -Zyklus  $z \bmod m \bmod F - U$  sicher  $\varepsilon$ -homolog  $\bmod m \bmod F - U'$  ist zu einem wohlbestimmten ganzen Vielfachen von  $Z$  (der Koeffizient von  $Z$  verschwindet, wenn die Dimension von  $z$  von  $r$  verschieden ist). Ist  $F$  zusammenhängend und regulär in jedem seiner Punkte bez.  $r$ , so nennen Verff.  $F$  eine  $r$ -dimensionale verallgemeinerte Mannigfaltigkeit; sie ist  $r$ -dimensional im Sinne von Brouwer-Menger-Urysohn und ebenfalls im Sinne der Alexandroffschen geometrischen Dimension nach einem beliebigen Modul; liegt sie in einem euklidischen  $R^n$ , so sind alle ihre Punkte  $s$ -erreichbar für jedes  $s$ , also erreichbar im gewöhnlichen Sinne; für  $r = n - 1$  erhält man gerade die Mannigfaltigkeiten von Wilder (Ann. of Math. **35**, 876—903). — Die abgeschlossene und beschränkte Menge  $F$  des  $R^n$  heißt regulär um ihren Punkt  $a$  bez.  $s$  als Dimension, wenn eine Kugelumgebung  $H$  (bez.  $R^n$ ) mit  $a$  als Mittelpunkt existiert, so daß gilt: 1. In jeder Umgebung (bez.  $R^n$ )  $U \subset H$  von  $a$  existiert ein  $s$ -dimensionaler polyedraler Zyklus  $z \subset U - F$  mit ganzen Koeffizienten, der in  $H - F$  nicht homolog  $0$  ist bez. rationaler Koeffizienten; 2. es gibt eine Kugelumgebung  $H' \subset H$  von  $a$  derart, daß jeder  $s$ -dimensionale Zyklus  $\subset H' - F$  mit ganzen Koeffizienten in  $H - F$  einem ganzen Vielfachen  $tz$  von  $z$  homolog ist. Verff. sprechen folgenden

Satz aus: Ist  $F$  eine abgeschlossene und beschränkte Menge des  $R^n$ , so sind die Punkte von  $F$ , in denen  $F$  regulär ist bez.  $r$ , identisch mit den Punkten von  $F$ , um welche  $F$  regulär ist bez.  $n - r - 1$ . — Weiter wird eine Unterscheidung in orientierbare und nichtorientierbare verallgemeinerte Mannigfaltigkeiten gegeben. *Nöbeling*.

**Cairns, Stewart S.: Polyhedral approximations to regular loci.** *Ann. of Math.*, II. s. 37, 409—415 (1936).

Im euklidischen  $E_n$  sei  $M_r$  eine  $r$ -dimensionale unberandete vollständig reguläre Mannigfaltigkeit, d. h. eine kompakte zusammenhängende Menge, deren jeder Punkt eine Umgebung in  $M_r$  besitzt, die durch stetig differenzierbare Funktionen  $x_i = f_i(u_1 \dots u_r)$  mit Funktionalmatrix vom Range  $r$  als homöomorphes Bild eines Gebietes des  $E_r$  dargestellt werden kann. Verf. hat früher die Triangulierbarkeit von  $M_r$  bewiesen [*Ann. of Math.* 35, 579—587 (1934); dies. Zbl. 12, 36]. Jetzt zeigt er die Existenz eines Polyeders  $K_r$  (Ecken auf  $M_r$ ) mit einer topologischen Abbildung von  $M_r$  auf  $K_r$ , derart, daß entsprechende Punkte einen beliebig kleinen Abstand haben und für jeden Punkt von  $K_r$  die dortigen Richtungskosinus sich beliebig wenig unterscheiden von den Richtungskosinus der  $r$ -dimensionalen linearen Tangentialmannigfaltigkeit an  $M_r$  im Bildpunkt. Der elementargeometrische Inhalt von  $K_r$  unterscheidet sich beliebig wenig von dem durch das übliche Integral definierten Inhalt von  $M_r$ . — Die Behauptungen sind auch richtig für ein reguläres  $r$ -Gebilde; zur Definition vgl. die oben zitierte Arbeit. *Nöbeling* (Erlangen).

**Reidemeister, Kurt: Das Dualitätstheorem für Homotopiekettenringe.** *Math. Z.* 41, 176—183 (1936).

A general sort of subdivision of a complex replaces individual cells by cell-like clusters of cells. The author studies the effect of such subdivision on the homology theory of his homotopy chains [see *J. reine angew. Math.* 173, 164—173 (1935); this Zbl. 12, 126]. A homotopy  $q$ -chain = a linear form in  $q$ -cells of a complex with coefficients from the ring of its fundamental group over the integers = an ordinary  $q$ -chain on the universal covering complex. Invariance is assured if the cell-like clusters are simply connected, as is the case with the star-cells used to pass from a manifold to its dual. Hence a duality theorem of the familiar type for manifolds holds in the author's theory of homotopy chains. *A. W. Tucker* (Princeton).

## Mechanik.

**Morley, F., and J. R. Musselman: Note on astatic elements.** *Amer. J. Math.* 58, 637—638 (1936).

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  Punkte der komplexen Ebene und  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  komplexe Zahlen vom Betrage 1 derart, daß sich das ebene Kräftesystem, dessen Kräfte in den Punkten  $a_v$  angreifen und durch die Einheitsvektoren  $\tau_v$  gegeben sind, im Gleichgewicht befindet. Zu jedem festen  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gibt es dann genau einen Punkt  $b_i$  von folgender Eigenschaft: Verschiebt man den Angriffspunkt  $a_i$  von  $\tau_i$  nach  $b_i$  und läßt die übrigen Angriffspunkte ungeändert, so entsteht ein Kräftesystem im astatischen Gleichgewicht, d. h. ein System, das im Gleichgewicht bleibt, wenn alle Vektoren  $\tau_v$  um denselben willkürlichen Winkel gedreht werden. Die Vektoren  $b_v - a_v$  haben dann die Vektorsumme 0. — Wählt man für die  $\tau_v$  speziell die  $n$ -ten Einheitswurzeln, so erhält man eine Aussage über Lagrangesche Resolventen. *W. Fenchel*.

● **Platrier, Ch.: Cinématique du solide et théorie des vecteurs. La masse en cinématique et théorie des tenseurs du second ordre. Cinématique des milieux continus.** (Actualités scient. et industr. Nr. 325, 326 et 327. Exposés de géométrie cinématique. Cours de l'école polytechn. Publiés par Ch. Platrier. I, II, III.) Paris: Hermann & Cie. 1936. Nr. 325: 55 pag. et 10 fig. Frs. 12.—. Nr. 326: 83 pag. et 17 fig. Frs. 18.—. Nr. 327: 34 pag. et 22 fig. Frs. 8.—.

Die drei Hefte enthalten den ersten, vorbereitenden Teil von Vorlesungen über Mechanik. Sie behandeln (zum Teil ohne Beweise) die wichtigsten Sätze der Kinematik



des Punktes, des starren und des deformierbaren Körpers sowie der Geometrie der Massen in knapper und klarer Darstellung. Vektor- und Tensorrechnung werden konsequent verwendet und in dem erforderlichen Umfang kurz entwickelt. *Fenchel*.

**Platrier, Charles:** *Calcul de l'énergie d'accélération d'un solide*. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1405—1407 (1936).

Dans un grand nombre de problèmes de mouvement de systèmes définis à l'aide d'un nombre entier de paramètres, l'application des équations d'Appell exige souvent de longs calculs pour exprimer l'énergie d'accélération  $S$  du système matériel considéré. Pour un solide mobile autour d'un point fixe l'auteur donne une expression de cette énergie; elle est la somme des trois quantités suivantes: 1° le produit, par le carré de la rotation instantanée du solide, de son énergie cinétique; 2° le demi-produit, par le carré de la rotation dérivée première, de son moment d'inertie par rapport au vecteur rotation dérivée première ayant le point fixe pour origine; 3° le produit scalaire changé de signe, par la rotation dérivée seconde d'entraînement, du moment cinétique du solide par rapport au point fixe. *H. I. E. Beth* (Amersfoort).

**Aimond, Fernand:** *Sur l'énergie d'accélération d'un solide ayant un point fixe*. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1407—1409 (1936).

M. Platrier a donné (voir le réf. préc.) une expression de l'énergie d'accélération d'un solide ayant un point fixe. L'auteur rattache cette expression au théorème démontré par M. Platrier (dans „La masse en cinématique et théorie des tenseurs du second ordre“, p. 79) sur les propriétés d'addition de l'énergie d'accélération d'un système quand on introduit le solide privilégié animé d'un mouvement infiniment petit du second ordre par rapport au trièdre de référence. *H. I. E. Beth* (Amersfoort).

**Arrighi, Gino:** *Sur l'expression de l'énergie d'accélération*. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 157—159 (1936).

**Bilimovitch, Anton:** *Über den vektoriellen Begriff des Trägheitsproduktes*. Publ. Math. Univ. Belgrade **4**, 217—219 (1935).

Verf. bemerkt, daß sich Trägheitsmoment und Deviationsmoment als Spezialfälle der folgenden von ihm als Trägheitsprodukt bezeichneten Begriffsbildung auffassen lassen: Durch einen willkürlichen Punkt  $O$  lege man zwei willkürliche Achsen, deren Richtungen durch die Einheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$  gegeben seien. Man bilde  $\sum_i m_i (e_1 \times r_i) \cdot (e_2 \times r_i)$ , wo  $m_i$  die Massen und  $r_i$  ihre Ortsvektoren sind und über alle Massen zu summieren ist. ( $\times$  bedeutet vektorielle und  $\cdot$  skalare Multiplikation.)

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Lotze, Alfred:** *Die Grundgleichungen der Mechanik im elliptischen Raum*. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **46**, Abt. 1, 51—70 (1936).

This paper treats, by the methods of Grassmann, the mechanics of particles and rigid bodies in (simple) elliptic space of three dimensions. The essential distinction between the problem and the corresponding question in Euclidean space lies in the fact that one must use localized vectors in the former — the concept of free vectors not being available. The paper treats D'Alembert's principle and Lagrange's equations (for material particles); the motion of a rigid body (including Euler's equations); the concepts of kinetic and potential energy and moment of inertia; and ends with a remark on the theory of motors (= screws).

*Murnaghan* (Baltimore).

**Kron, Gabriel:** *Quasi-holonomic dynamical systems*. Physics **7**, 143—152 (1936).

The author applies the theory of non-holonomic reference frames of non-Riemannian geometry to quasi-holonomic dynamical systems. These include systems containing both mechanical and electro-magnetic energies, such as those involving rotating electrical machinery. The equations of motion found are similar to those of a particle in a non-Riemannian space. The dynamical equations of Lagrange when referred to a special non-holonomic reference frame are correlated with the field equations of Maxwell.

*P. Franklin* (Cambridge, Mass.).

**Dijl, B. van:** The application of Ricci-calculus to the solution of vibration equations of piezo-electric quartz. *Physica* 3, 317—326 (1936).

This paper obtains (and discusses numerically for quartz) the secular equation governing the propagation of plane elastic waves through an indefinitely extended anisotropic medium. The symbolism of tensor analysis is used but the paper restricts itself to rectangular cartesian coordinates in a euclidean metric [the derivation of equation (13) assuming implicitly that the components of the metrical tensor are constant].

*Murnaghan* (Baltimore).

## Quantentheorie.

● **Krbek, Franz von:** Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Mathematik. (Neue Dtsch. Forsch. Hrsg. v. Hans R. G. Günther u. Erich Rothacker. Bd. 81.) Berlin: Junker & Dünhaupt 1936. 64 S. RM. 3.20.

Phänomenologische Thermodynamik, Plancksches Gesetz usw. — Schrödingergleichung — Hilbertraum und Operatoren — Ungenauigkeitsrelation. *P. Jordan*.

**Strauss, Martin:** Ungenauigkeit, Wahrscheinlichkeit und Unbestimmtheit. Zu K. Poppers „Bemerkungen zur Quantenmechanik“. *Erkenntnis* 6, 90—113 (1936).

Die Behauptung von Popper (Logik der Forschung, Wien 1935), eine konsequente wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung der Quantenmechanik bedinge die Möglichkeit einer Unterschreitung der Ungenauigkeitsrelationen, wird durch ausführliche Darlegung der diesbezüglichen Aussagen der Quantenmechanik als unrichtig nachgewiesen.

*C. F. v. Weizsäcker* (Leipzig).

**Dugas, René:** Sur une définition de la légalité de la mécanique quantique. *C. R. Acad. Sci., Paris* 203, 41—43 (1936).

**Géhéniau, J.:** Contribution à la mécanique ondulatoire. *J. Physique Radium*, VII. s. 7, 181—186 (1936).

Untersuchungen zur speziell und allgemein invarianten Fassung der wellenmechanischen Gleichungen, anknüpfend an de Donder und Whittaker. *Jordan*.

● **Rasetti, Franco:** Il nucleo atomico. Bologna: Nicola Zanichelli 1936. 232 pag. e 44 fig. rilegato L. 50.—.

Das Buch gibt in sechs Kapiteln eine allgemeine Übersicht über die Kernphysik, wobei auch die neueren Ergebnisse (Positronen, Neutronen, künstliche Radioaktivität) berücksichtigt werden. Obwohl es im wesentlichen vom experimentellen Standpunkt geschrieben ist, werden auch die wichtigsten theoretischen Gesichtspunkte eingehend behandelt. Wir erwähnen besonders: Theorie des Durchgangs von  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen durch Materie, Gamowsche Theorie des Kernzerfalls, Theorie der „Internal conversion“ und die Theorie von Heisenberg-Majorana über den Bau der Atomkerne.

*Casimir* (Leiden).

**Taylor, H. M.:** Selection rules in nuclear radiation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 32, 291—300 (1936).

Ausgehend von der Diracschen Wellengleichung diskutiert Verf. eingehend die Auswahlregeln für elektrische und magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung, für ein Teilchen, das sich in einem Zentralfeld bewegt. Magnetische Dipolstrahlung und elektrische Quadrupolstrahlung können bei demselben Übergang emittiert werden, aber nur bei Übergängen zwischen zwei Zuständen eines Multiplets ist die Intensität der Dipolstrahlung vergleichbar mit derjenigen der Quadrupolstrahlung. Die Ergebnisse werden angewandt auf die von radioaktiven Kernen emittierte  $\gamma$ -Strahlung.

*Casimir* (Leiden).

**Buark, Arthur, and Lee Devol:** The general theory of fluctuations in radioactive disintegration. *Physic. Rev.*, II. s. 49, 355—367 (1936).

Es sei  $f_t(t)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atomzerfall eines radioaktiven Körpers in der Zeit zwischen  $t$  und  $t + dt$  stattfindet, nachdem im Intervall  $(0, t)$   $r$



solche Ereignisse stattgefunden haben. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit  $W_n(0, t)$  dafür, daß in dem Intervall  $(0, t)$   $n$  Atome zerfallen. Die Lösung wird durch Verallgemeinerung einer von Bateman aufgestellten Differentialgleichung gefunden, und zwar zunächst allgemein für beliebige  $f$  und dann speziell für einen radioaktiven Strahler, der während der Beobachtungszeit bereits merklich an Intensität verliert. Für den Fall, daß die Strahlung mittels eines Zählers untersucht wird, der einen beschränkten Wirkungsgrad hat und der nur Strahlen innerhalb eines bestimmten Raumwinkels registriert, wird ferner die Wahrscheinlichkeit  $P_n(T_1, T_1 + T_2)$  dafür berechnet,  $n$  Korpuskeln in dem Intervall zwischen  $T_1$  und  $T_1 + T_2$  zu zählen. Auch die Verteilung der Zählerimpulse, die durch  $\gamma$ -Strahlen und sekundäre  $\beta$ -Strahlen ausgelöst werden oder durch mehrere unabhängige Strahlungsquellen hervorgebracht werden, wird untersucht. Weiter wird die Frage behandelt, welchen Einfluß auf diese Verteilung der Umstand hat, daß jeder Zähler eine endliche „Erholungszeit“ hat, d. h. daß der Zähler nach einer jeden erfolgten Registrierung erst nach einer endlichen Zeit für eine neue Registrierung bereit ist. Schließlich wird der Fall einer radioaktiven Strahlungsquelle untersucht, in der sich zwischen der „Muttersubstanz“ und ihren „Tochtersubstanzen“ ein radioaktives Gleichgewicht eingestellt hat. In Wirklichkeit ist die Anzahl der Atome dieser Tochtersubstanzen nicht genau konstant, sondern unterliegt zeitlichen Schwankungen, deren Größe sich berechnen läßt; ebenso werden die Schwankungen in der Strahlung dieser Tochtersubstanzen berechnet. *Fürth.*

**Meksyn, D.:** Structure of neutrons and  $\beta$ -disintegration. *Nature* **137**, 906 (1936).

Betrachtungen über die Erhaltungssätze beim  $\beta$ -Zerfall. *C. F. v. Weizsäcker.*

**Vleck, J. H. van:** On the isotope corrections in molecular spectra. *J. chem. Phys.* **4**, 327—338 (1936).

In erster Näherung sind die Schwingungs- und Rotationsenergie isotoper zweiatomiger Moleküle umgekehrt proportional der Wurzel aus der reduzierten Masse und der reduzierten Masse selbst. Bei genauerer Rechnung treten aber Abweichungen von dieser Proportionalität auf. Verf. gibt eine Übersicht über Ursprung und Art dieser Abweichungen, die teilweise schon von anderen Autoren behandelt worden sind. Weiterhin erörtert er die Isotopenverschiebung der Elektronenterme und zeigt, daß die Bewegung des Schwerpunkts der Kerne (gegenüber dem Schwerpunkt des Gesamtmoleküls), die gewöhnlich vernachlässigt wird, mindestens so wichtig ist wie die übrigen Ursachen einer Verschiebung. Für die ultravioletten Linien des Wasserstoffmoleküls wird die Theorie mit der Erfahrung verglichen. Schließlich folgen einige Bemerkungen über den Diamagnetismus von  $H_2$ . *R. de L. Kronig.*

**Easthope, C. E.:** The polarizability of molecular hydrogen  $H_2$ . *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 260—264 (1936).

Die Polarisierbarkeit der Wasserstoffmolekel wird mit einem Störungsverfahren berechnet, wobei der ungestörte (feldfreie) Zustand durch eine Heitler-Londonsche Eigenfunktion beschrieben wird und wobei in der Summation über die Beiträge der höheren ungestörten Zustände nur die dem Grundterm benachbarten mitgeführt werden. *F. Hund (Leipzig).*

**Nordheim-Pöschl, Gertrud:** Bahnvalenz und Richtungseigenschaften in der Theorie der chemischen Bindung. I u. II. *Ann. Physik*, V. F. **26**, 258—307 (1936).

In der Heitler-Londonschen Deutung der chemischen Bindung wurde der Grundzustand einer Molekel angenähert durch die Grundzustände der einzelnen Atome. Die Durchführung für Atome in  $S$ -Grundzuständen zeigte einen Zusammenhang zwischen chemischer Bindung und den Spinnmomenten in den einzelnen Atomen und in der Molekel („Spinvalenz“). In der Slater-Paulingschen Deutung (vgl. dies. Zbl. **3**, 94f.) wird der Grundzustand der Molekel angenähert durch die Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen in den Atomen; die Wechselwirkung der Elektronen eines Atoms wird also in gleicher Näherung wie die chemische Bindung betrachtet. Beide Auffassungen sind vereinfachte Modelle der Wirklichkeit. Hier wird nun eine Weiterbildung der

erstgenannten Auffassung in Richtung auf die zweite hin unternommen, indem die tiefsten Zustände der einzelnen Atome zur Annäherung des Grundzustandes der Molekel benutzt werden. Das Verfahren erklärt eine Reihe von Einzelheiten der chemischen Bindung, die bisher in der Auffassung der „Spinvalenz“ nicht verständlich waren: Triplett-Grundterm bei  $O_2$ , gerichtete Valenzen am C-Atom, Nichtdrehbarkeit der C=C-Doppelbindung.

*F. Hund* (Leipzig).

**Wigner, E.: On the constant  $A$  in Richardson's equation.** *Physic. Rev.*, II. s. 49, 696—700 (1936).

Eine Temperaturabhängigkeit der chemischen Konstanten des Elektronengases in einem Metall muß sich in einer Abweichung der Konstante  $A$  in der Richardson-Formel für die Glühelctronenemission von dem elementaren Wert  $4\pi me k^2/h^3$  äußern. Verf. gibt eine Abschätzung dieses Effekts auf Grund der Metalltheorie. Es sind Abweichungen von  $A$  um einen Faktor von der Ordnung 1—3 zu erwarten, und zwar eher nach kleineren Werten. Ein genaues Stimmen des elementaren Wertes wäre hiernach nur ein Zufall.

*Nordheim* (Lafayette, Indiana).

**Żdanow, V.: Berechnung des Kompressibilitätskoeffizienten der Kristalle.** *Z. Physik* 101, 86—92 (1936).

Es wird angenommen, daß die Wechselwirkung der Atome in einem Kristallgitter durch eine Potentialfunktion beschrieben werden kann, wie sie von Morse in der Theorie zweiatomiger Moleküle eingeführt ist. Die Konstanten in dem Ansatz werden mit Hilfe der bekannten Gitterkonstante und der Eigenfrequenzen des Kristalls ermittelt, so daß die Kompressibilität berechnet werden kann. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist leidlich.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

## Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

**Jaecyna, W., S. Derewjankin, A. Obnorski und T. Parfentjew: Die allgemeinen physikalischen Grundlagen der reellen Thermodynamik.** *Z. Physik* 101, 77—85 (1936).

**McKay, A. T.: Die einfache Diffusionsfunktion.** *Z. angew. Math. Mech.* 16, 183 bis 186 (1936).

In the study of diffusion, according to the Fick equation, the simple diffusion function

$$\psi(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2 x}}{(2n+1)^2}$$

often arises. This expression converges very slowly for small values of  $x$ ; hence in this paper the author derives the following alternative expression suitable for such values

$$\psi(x) = 2x\psi'(x) + 8 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{r}{\sqrt{2\pi}} \int_{r\pi/\sqrt{2x}}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

where

$$\psi'(x) = \frac{2}{\pi^{3/2}\sqrt{x}} \left\{ 1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} e^{-\frac{r^2 \pi^2}{4x}} \right\}.$$

The paper includes also a nomogram for  $\psi(x)$ , and a table of values of  $\psi'(x)$ , with central second differences, for  $x=0$  to  $x=1$  at 0,01 intervals, and from  $x=1$  to  $x=2,9$  at 0,1 intervals.

*S. Chapman* (London).

**Borgnis, F.: Über Stromleitung mittels Konvektion und Diffusion. I. II.** *Z. Physik* 100, 117—140 u. 478—512 (1936).

In einem flüssigen Dielektrikum der DEK  $\Delta$  stehen einander zwei ebene Elektroden aus Metall gegenüber, aus denen entweder infolge eines Lösungsdruckes oder



durch thermische Emission oder infolge eines lichtelektrischen Effektes dauernd Elektrizitätsträger eines Vorzeichens in die Flüssigkeit entsandt werden, so daß von der Anode ein von dem dort herrschenden Feld unabhängiger Strom  $i_a$  und von der Kathode ein ebensolcher Strom  $i_k$  ausgeht. Andere Elektrizitätsträger sollen in der Flüssigkeit nicht vorhanden sein. Zwischen den Elektroden wird eine äußere Spannung  $U$  angelegt. Es wird dann ein Strom  $i$  durch die Flüssigkeit fließen, der im stationären Fall durch das Zusammenwirken der Diffusion (mit dem Diffusionskoeffizienten  $D$ ) und der Konvektion der Ladungsträger im elektrischen Feld (mit der elektrischen Beweglichkeit  $l$ ) zustande kommt. Die Aufgabe besteht darin, den Verlauf der Feldstärke  $\mathcal{E}$  und der Ladungsdichte  $n$  zwischen den Elektroden in Abhängigkeit von  $U$  zu berechnen sowie die Stromspannungscharakteristik, d. h. den Zusammenhang zwischen  $i$  und  $U$ . Als Ausgangsgleichungen in dem betrachteten eindimensionalen Fall gelten die folgenden:  $i = n l \mathcal{E} - D \frac{dn}{dx}$ ,  $n = A \frac{d\mathcal{E}}{dx}$ . Es werden zunächst qualitative Betrachtungen über die Form der Lösung angestellt. Es wird ferner gezeigt, daß im stromlosen Zustand zwischen dem Potential  $\varphi$  und der Ladungsdichte das

Boltzmannsche Verteilungsgesetz  $n = c e^{-\frac{l}{D}\varphi}$  gilt. Es wird dann das Problem exakt gelöst, indem aus den oben angegebenen Beziehungen eine Differentialgleichung für  $\mathcal{E}$  gewonnen wird, die sich unter den den formulierten Bedingungen entsprechenden Randbedingungen integrieren läßt, und zwar sowohl für den Fall äußerer Stromlosigkeit ( $i = 0$ ) als auch für beliebige  $i$ . Numerische Beispiele werden durchgerechnet.

Fürth (Prag).

**Satô, Mizuho: Der Lichtdruck und die Brownsche Bewegung.** Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 25, 156—162 (1936).

Es wird zunächst der Lichtdruck  $p$  im Hohlraum unter der Annahme berechnet, daß die Lichtquanten alle die gleiche Geschwindigkeit  $c$  haben und bei ihrem Auftreffen auf eine Fläche wie elastische Kugeln reflektiert werden, wobei sie auf die Fläche Impuls übertragen. Hierbei wird der klassische Impulssatz und für die Strahlungsdichte das Plancksche Strahlungsgesetz zugrunde gelegt. Auf gleichem Wege wird ferner der Reibungswiderstand berechnet, den infolge der auftretenden Lichtquanten ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes kugelförmiges Teilchen vom Radius  $a$  in dem Hohlraum erfährt. Es ergibt sich für die hydrodynamische Beweglichkeit  $B$  der Ausdruck  $B = c/4\pi a^2 p$ . Schließlich wird das mittlere Verschiebungsquadrat  $\bar{\Delta}^2$  der Brownschen Bewegung berechnet, in die das Teilchen durch die Stöße der Lichtquanten gerät, wobei sich die Formel  $\bar{\Delta}^2 = 2B \frac{R}{L} T \cdot t \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{-5} / \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} \right)$

ergibt. (Da das Teilchen im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung stehen muß, sollte in dieser Formel der letzte Term nicht auftreten; sein Auftreten beweist demnach, daß das zugrunde gelegte Wechselwirkungsgesetz zwischen Lichtquanten und Teilchen nicht zutreffen kann. Der Ref.)

Fürth (Prag).

**Crout, Prescott D.: An application of kinetic theory to the problems of evaporation and sublimation of monatomic gases.** J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 15, 1—54 (1936).

Steht ein einatomiger Dampf in einem geschlossenen Gefäß mit seiner Flüssigkeit im Gleichgewicht, dann kann man ihn als ein isotropes Gas bezeichnen, da in ihm überall die gleiche, von der Richtung unabhängige Geschwindigkeitsverteilung sowie der gleiche Druck, nämlich der Sättigungsdruck  $P_0$  und die gleiche Temperatur, nämlich die der Flüssigkeit  $T_0$ , herrschen. Läßt man hingegen den von der erhitzten Flüssigkeit ausgehenden Dampf ständig an einer abgekühlten Wand kondensieren, dann läßt sich zeigen, daß die Annahme, das Gas befinde sich in unmittelbarer Nachbarschaft der Flüssigkeitsoberfläche im isotropen Zustand, zu einem Widerspruche führt. Es wird deshalb angenommen, daß daselbst eine Geschwindigkeitsverteilungsfunktion von der Form  $A e^{-m[h_L(u-u_0)^2 + h_T v^2 + h_P w^2]}$  gelten möge, worin  $u$  die Komponente der Molekulargeschwindigkeit senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche,  $v$  und  $w$  die Komponenten parallel zur Flüssigkeitsoberfläche und  $u_0$  die Strömungsgeschwindigkeit des Dampfes



bedeuten;  $A$ ,  $h_L$  und  $h_T$  sind Konstanten. In Verallgemeinerung des bei isotropen Gasen angewendeten Gedankenganges kann man auf Grund dieses Verteilungsgesetzes für das Gas zwei Temperaturen, eine „longitudinale“  $T_L$  und eine „transversale“  $T_T$ , definieren mittels der Beziehungen  $T_L = \frac{1}{2h_L \cdot k}$ ,  $T_T = \frac{1}{2h_T \cdot k}$ . In genügender Entfernung von der Flüssigkeits-

oberfläche muß infolge der Zusammenstöße zwischen den Molekülen die Anisotropie verschwinden, und es stellt sich dann eine Geschwindigkeitsverteilungsfunktion von der Form  $A_1 e^{-h_1 m [(u-u_0)^2 + v^2 + w^2]}$  ein, worin die Konstante  $h_1$  mit der dort herrschenden Temperatur  $T_1$

in der Beziehung  $T_1 = \frac{1}{2h_1 k}$  steht. Auf Grund bekannter Methoden der kinetischen Gas-

theorie und unter Einführung plausibler Gleichgewichtsbedingungen für die Flüssigkeitsoberfläche werden nun der dort herrschende Druck  $P$ , und die Temperaturen  $T_L$  und  $T_T$ , schließlich die Temperatur  $T_1$ , der Druck  $P$  und die Gasdichte  $\nu$  im isotropen Gas (in genügender Entfernung von der Flüssigkeitsoberfläche) im Verhältnis zu  $T_0$  bzw.  $P_0$  bzw.  $\nu_0$  berechnet als Funktion der Verdampfungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit. Es ergibt sich ferner, daß diese nicht größer als ein gewisser kritischer Wert werden kann, der erreicht ist, wenn das isotope Gas sich mit der ihm zukommenden Schallgeschwindigkeit bewegt. Numerische Beispiele für Hg werden durchgerechnet.

Fürth (Prag).

**Laue, M. v.: Der Einfluß eines Magnetfeldes auf Wärmeleitung und Reibung in paramagnetischen Gasen. II.** Ann. Physik, V. F. 26, 474—480 (1936).

Es werden mehrere Ungenauigkeiten der unter gleichem Titel erschienenen ersten Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 12, 47) richtiggestellt. Die Berichtigung betrifft die gastheoretischen Ableitungen, insbesondere die Theorie der Reibung. Die früheren Ergebnisse bleiben jedoch in allem Wesentlichen unverändert.

E. Vogt.

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Elastic waves formed by local stress changes of different rapidities.** Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 10—16 (1936).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (Zbl. Mech. 4, 228) wird auseinandergesetzt, daß es, da die Wärmeleitung bei der Wellenausbreitung zu vernachlässigen sei, für die auftretende Energie gleich sei, ob auf einen Körper ein Druck bestimmter Größe einwirkt oder aber ob ein Druck gleicher Größe von dem Körper im Spannungszustand aufgehoben wird, und daß der Anfangsdruck auf die auftretende elastische Störung nicht einwirkt, es sei denn, daß diese eine Dichteänderung bedingt. Die Verrückungen bei verschieden schneller Auslösung werden berechnet, ebenso die Energieausbreitung.

Brockamp (Potsdam).

**Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: The nature of transverse waves transmitted through a discontinuity layer.** Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 157—163 (1936).

Für den Fall, daß über dem unendlichen Halbraum zwei Schichten verschiedener Dichte und Rigkeit liegen, werden für Transversalwellen, deren Bewegung parallel zur Grenzfläche erfolgt, die Verrückungen  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$  angegeben, wenn die einfallende Welle die Grenzfläche nicht senkrecht trifft. Die verschiedenen Möglichkeiten, Totalreflexion an keiner der Grenzflächen, Totalreflexion an einer der Grenzflächen, Totalreflexion an beiden Grenzflächen werden untersucht. Die Amplituden der durchgehenden Welle zeigt sich nicht nur abhängig von dem Einfallswinkel, sondern auch von dem Verhältnis der einfallenden Welle zur Schichtdicke. Für verschiedene Dichte und Rigkeit der drei Medien werden bei verschiedenem Einfallswinkel die Amplitudenkurven in Abhängigkeit von der Wellenlänge gegeben.

Brockamp (Potsdam).

**Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Improved theory of energy dissipation in seismic vibrations of a structure.** Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 164—188 (1936).

In Weiterführung früher besprochener Arbeiten (dies. Zbl. 11, 430) wird der Vorgang beim Auftreffen longitudinaler und transversaler Wellen und ihrer Reflexionen an verschiedenartig gestalteten, fundierten und ausgebildeten Gebäuden untersucht. Die Verrückung im Erdboden durch die einfallende und reflektierte Welle und im Gebäude wird für die verschiedenen Fälle angegeben. Auch für die Resonanzlage



werden die entsprechenden Formeln angeführt, die besonders für die Gebäudeforschung — es läßt sich verhältnismäßig leicht die Eigenschwingung eines Gebäudes anregen und feststellen — von Bedeutung ist. *Brockamp* (Potsdam).

**Caloi, P.: Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 507—511 (1936).

**Tuboi, Ihati: Free oscillations in a lake having non elongated and smooth boundary.** Mem. Imp. Marine Observ. 6, 227—236 (1936).

**Belluigi, A.: Theorie outlines of electrical coring.** Beitr. angew. Geophys. 6, 25 bis 37 (1936).

Der scheinbare spezifische Widerstand, der in Bohrlöchern mittels der Wenner-schen Vierpunktmethode gemessen wird, steht in keiner einfachen Beziehung zu den wirklichen spezifischen Widerständen der durchbohrten Schichten. Insbesondere fallen die Unstetigkeiten der gemessenen Kurven nicht immer mit den Diskontinuitäten des geologischen Gefüges zusammen. Für verschiedene Anordnung der Basispunkte, für zwei und drei Schichten sowie eine kugelförmige Einlagerung werden berechnete Kurven gezeichnet und diskutiert. Erforderlich hierzu ist die Kenntnis der Potentialfunktion im inhomogenen räumlich ausgedehnten Medium. *J. N. Hummel* (Berlin).

**Stevenson, A. F.: Correction to my paper, „on the theoretical determination of earth resistance from surface potential measurements“.** Philos. Mag., VII. s. 21, 829 bis 830 (1936).

A criticism communicated by Langer is accepted, which invalidates the author's conclusions relative to the main object of the original paper (this Zbl. 11, 335).

*Louis B. Slichter* (Cambridge).

● **Maurain, Ch.: Magnétisme et électricité terrestres. Fasc. 1: Magnétisme terrestre.** (Actualités scient. et industr. Nr. 287. Physique du globe. Exposés publiés par Ch. Maurain. I.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 63 pag. et 6 fig. Frcs. 15.—.

Bericht über die Fortschritte auf den Gebieten des Erdmagnetismus, der Erdströme und des Polarlichtes innerhalb der letzten zehn Jahre. Entsprechend dem Arbeitsgebiet des Verf. sind ausführlicher behandelt die Beziehungen zwischen der Sonnentätigkeit und den erdmagnetischen Störungen. *J. Bartels* (Eberswalde).

**Zanstra, H.: A possible test of the super-nova hypothesis for cosmic rays.** Physica 3, 605—626 (1936).

**Menezes de Oliveira, A.: Über die Natur der kosmischen Strahlung.** Ann. Acad. Brasil. Sci. 8, 55—60 (1936) [Portugiesisch].

**Jánossy, Ludwig: Zur Umrechnung von Höhenstrahlenintensitäten auf parallelen Einfall bei Messungen von Einzelstößen und Koinzidenzen mit Zählrohren.** Z. Physik 101, 129—134 (1936).

Die Umrechnung wird unter Zuhilfenahme der Ergebnisse einer früheren Arbeit [Z. Physik 99, 369 (1936); dies. Zbl. 13, 335] durchgeführt. Der Vergleich eines Zahlenbeispiels mit Versuchsergebnissen führt zu befriedigender Übereinstimmung. Verf. sieht die Bedeutung der Umrechnung darin, daß sie allein einen Vergleich von Koinzidenzmessungen mittels Zählrohren mit Ionisationskammermessungen ermöglicht.

*J. N. Hummel* (Berlin).

**Gião, Antonio: Bemerkungen über eine neue Theorie des allgemeinen Kreislaufes der Atmosphäre.** Gerlands Beitr. Geophys. 46, 331—338 (1936).

**Dedebant, G., et Ph. Wehrlé: La circulation générale de l'atmosphère. Réponse à M. Gião.** Gerlands Beitr. Geophys. 46, 339—349 (1936).

A. Gião macht gegen die Theorie von G. Dedebant und Ph. Wehrlé (vgl. Zbl. Mech. 3, 335) eine Reihe von Einwänden, gegen die sich die beiden Verff. anschließend verwahren.

*W. Tollmien* (Göttingen).